UEBER DIE ANWENDUNG DER CAUCHY'SCHEN MULTIPLICATIONSREGEL AUF BEDINGT CONVERGENTE ODER DIVERGENTE REIHEN[*]

VON

ALFRED PRINGSHEIM

In einer vor nahezu zwanzig Jahren verfassten Arbeit *über die Multiplication bedingt convergirender Reihen* [†] habe ich unter anderem gezeigt, dass das nach der CAUCHY'schen Regel gebildete Product aus einer nur *bedingt convergenten* oder sogar *divergenten* und einer *unbedingt* convergenten Reihe unter Umständen *unbedingt* convergirt. [‡] Und ich habe ferner hervorgehoben, dass auch für das Product *zweier bedingt convergenter* Reihen die Möglichkeit eines solchen Verhaltens keineswegs ausgeschlossen erscheine, ohne freilich damals im Stande zu sein, das wirkliche Vorkommen dieses Falles durch bestimmte Beispiele erweisen zu können. [§] Seitdem habe ich in Folge vielfacher Beschäftigung mit der Reihenlehre längst erkannt, dass das fragliche Verhalten für ganz grosse Kategorien von Reihen geradezu *typisch* ist, habe aber bisher nicht Gelegenheit genommen, hierüber etwas zu veröffentlichen. Nachdem nun Herr CAJORI in Bd. 2 dieser Zeitschrift, p. 25 ff. jene Frage wieder aufgenommen und durch Construction gewisser Beispiele in bejahendem Sinne entschieden hat, möchte ich mir erlauben, auch meine eigenen, auf ganz anderer und allgemeinerer Grundlage beruhenden Betrachtungen hier mitzutheilen und daran noch einige weitere Bemerkungen über den vorliegenden Gegenstand anzuknüpfen.

§ 1.

Es sei A_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine unbegrenzte Folge reeller oder complexer Zahlen von der Beschaffenheit, dass $\sum |A_\nu|$ *divergent* und $\mathop{\mathbf{L}} A_\nu = 0$ ist. Die Potenzreihe $\sum A_\nu x^\nu$ besitzt alsdann den Convergenzradius $|x| = 1$ und kann

[*] Presented to the Society at the Ithaca meeting, August 19, 1901. Received for publication May 24, 1901.

[†] Mathematische Annalen, Bd. 21 (1883), p. 327.

[‡] a. a. o., pp 357–359.

[§] a. a. o., p. 332.

auf dem Convergenzkreise *keinesfalls unbedingt*, wohl aber durchweg oder theilweise noch *bedingt* convergiren. Angenommen, es sei a, wo $|a| = 1$, eine *Divergenz*-Stelle für $\sum A_\nu x^\nu$. Ordnet man alsdann $(x-a)\sum A_\nu x^\nu$ wiederum nach Potenzen von x, also:

$$(x-a)\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu = -A_0 a + \sum_{\nu=1}^{\infty}(A_{\nu-1} - A_\nu a)\, x^\nu,$$

so geht diese neue Potenzreihe für $x = a$ in die folgende über:

$$-A_0 a + \sum_{\nu=1}^{\infty}(A_{\nu-1} a^\nu - A_\nu a^{\nu+1}) = -A_0 a + \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}(A_0 a - A_n a^{n+1}) = 0$$

d. h. sie *convergirt* für $x = a$ (gegen die Summe 0), während sie im übrigen durchaus *gleichzeitig* mit der ursprünglichen Reihe $\sum A_\nu x^\nu$ *convergirt* oder *divergirt*.

Es möge nun $\sum A_\nu x^\nu$ für $|x| = 1$ noch *bedingt* convergiren mit *einziger* Ausnahme der auf dem Einheitskreise gelegenen Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Bildet man alsdann die Potenzreihe:

$$(1^a) \qquad \mathfrak{P}_1(x, a) = \prod_{\kappa=1}^{m}(x - a_\kappa)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu,$$

indem man wiederum das rechts stehende Product nach Potenzen von x ordnet, so wird nach dem eben gesagten diese Reihe auf dem Einheitskreise (der dann nicht einmal mehr der *Convergenz*kreis zu sein braucht) *ausnahmslos* convergiren. Daraus darf freilich noch nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass die Convergenz dann allemal noch eine *unbedingte* (absolute) sein müsse.* Immerhin wird man sagen können, dass "*im allgemeinen*" oder, um diesen Ausdruck noch genauer zu praecisiren, in unendlich vielen, durch geeignete Auswahl der A_ν in beliebiger Anzahl leicht zu erzielenden Fällen $\mathfrak{P}_1(x, a)$ für $|x| = 1$ *unbedingt* convergiren wird.

Sei ferner $\sum B_\nu x^\nu$ eine ganz ähnliche Potenzreihe, die für alle Stellen auf dem Einheitskreise mit einziger Ausnahme von $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ (wo $\beta_\lambda \neq a_\kappa$) noch *bedingt* convergirt, sodass also:

$$(2^a) \qquad \mathfrak{P}_2(x, \beta) = \prod_{\lambda=1}^{n}(x - \beta_\lambda)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu x^\nu$$

für $|x| = 1$ widerum *ausnahmslos* und, bei geeigneter Auswahl der B_ν, auch *unbedingt* convergirt. Bildet man nun andererseits die beiden Potenzreihen:

$$(1^b) \qquad \mathfrak{P}_1(x, \beta) = \prod_{\lambda=1}^{n}(x - \beta_\lambda)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

---

* Mathematische Annalen, Bd. 25 (1885), p. 419. Münchener Berichte, Bd. 30 (1900), p. 71.

$$(2^b) \qquad \mathfrak{P}_2(x,\ \alpha) = \prod_{\kappa=1}^{m}(x-\alpha_\kappa)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu x^\nu,$$

so wird auf Grund der zu Anfang gemachten Bemerkung die *erstere* an den *Divergenzstellen* von $\sum A_\nu x^\nu$, also die Stellen α_κ und, entsprechend, die *zweite* an den Stellen β_λ noch *divergiren*, während im übrigen für $|x|=1$ beide Reihen *bedingt convergiren.*

Nun ist aber offenbar:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}_1(x,\ \beta)\cdot\mathfrak{P}_2(x,\ \alpha) = \mathfrak{P}_1(x,\ \alpha)\cdot\mathfrak{P}_2(x,\ \beta),$$

und diese *Gleichheit* wird zu einer vollkommenen *Identität*, wenn man ihre beiden Seiten wieder in Potenzreihen umformt, d. h. die Cauchy'sche Multiplicationsregel darauf anwendet. Wegen der für $|x|=1$ noch *unbedingten* Convergenz von $\mathfrak{P}_1(x,\ \alpha)$, $\mathfrak{P}_2(x,\ \beta)$ besteht dann diese letztere auch für die *Productreihe*, zu deren Herstellung auch die für $|x|=1$ nur *bedingt convergenten*, an den Stellen $x=\alpha_\kappa$ bezw. $x=\beta_\lambda$ sogar *divergenten* Reihen $\mathfrak{P}_1(x,\ \beta)$, $\mathfrak{P}_2(x,\ \alpha)$ dienen können.

Es hat keine Schwierigkeit, dieses Resultat auch auf den Fall zu übertragen, dass *eine* der beiden zu multiplicirenden Reihen *unbedingt* convergirt. Man hat dann nur $\sum B_\nu x^\nu$ als für $|x|=1$ noch *unbedingt* convergent anzunehmen und etwa zu setzen:

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x_\nu, \qquad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu x^\nu.$$

Behalten dann $\mathfrak{P}_1(x,\ \alpha)$, $\mathfrak{P}_2(x,\ \alpha)$ die in Gl. (1^a), (2^b) festgesetzte Bedeutung, so hat man wiederum:

$$(5) \qquad \mathfrak{P}_1(x)\cdot\mathfrak{P}_2(x,\ \alpha) = \mathfrak{P}_1(x,\ \alpha)\cdot\mathfrak{P}_2(x)$$

sodass $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x,\ \alpha)$, obschon die *erste* dieser beiden Reihen für $|x|=1$ nur *bedingt convergirt* bezw. für $x=\alpha_\kappa$ *divergirt*, wegen der *unbedingten* Convergenz von $\mathfrak{P}_1(x,\ \alpha)\cdot\mathfrak{P}_2(x)$ wieder eine *unbedingt* convergirende Productreihe liefert.

Hernach ergiebt sich:

Die Anwendung der Cauchy'schen Multiplicationsregel auf zwei Reihen, von denen die erste nur b e d i n g t c o n v e r g i r t oder sogar d i v e r g i r t, während die zweite b e d i n g t oder u n b e d i n g t convergirt, liefert in unendlich vielen Fällen eine u n b e d i n g t convergirende Reihe.

§ 2.

Um jetzt Reihen der fraglichen Art mit lauten *reellen* Gliedern zu erhalten, wird man vor allem die A_ν, B_ν und x *reell*, also $x=\pm 1$ anzunehmen haben. Die α_κ bezw. β_λ müssen sodann gleichfalls *reell* oder *paarweise conjugirt com-*

plex gewählt werden. Um auf dem Einheitskreise wenigstens *eine reelle Convergenz*-Stelle, etwa $x=1$, zu behalten, bleibt dann als einzige mögliche *reelle Divergenz*-Stelle für $\sum A_\nu x^\nu$ die Stelle $x=-1$ (d. h. die a_κ reduciren sich auf den *einen* Werth $a_1=-1$). Als einfachste Wahl für die *Divergenz*-Stellen von $\sum B_\nu x^\nu$ bleibt dann $\beta_1=i$, $\beta_2=-i$. Man genügt offenbar allen diesen Bedingungen, wenn man setzt:

$$A_\nu=(-1)^\nu a_\nu, \quad B_\nu=(-1)^{[\nu/2]} b_\nu,^*$$

wo die a_ν, b_ν positive, mit unbegrenzt wachsenden ν *monoton* gegen *Null* abnehmende Zahlen mit *divergenten* $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ vorstellen. In der That sind dann die beiden Reihen:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu x^\nu = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + - + - \cdots$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{[\nu/2]} b_\nu x^\nu = b_0 + b_1 x - b_2 x^2 - b_3 x^3 + + - - \cdots$$

für $|x|=1$ noch *bedingt convergent*, die *erste* mit einziger Ausnahme von $x=-1$, die *zweite* mit Ausnahme von $x=\pm i$. Bildet man ferner nach Analogie von Gl. (1^a), (2^a):

$$(5)\quad \begin{cases} (1+x)\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu x^\nu = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{\nu-1}-a_\nu)x^\nu \\ (1+x^2)\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{[\nu/2]} b_\nu x^\nu = b_0 + b_1 x + \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{[\nu/2]-1}(b_{\nu-2}-b_\nu)x^\nu, \end{cases}$$

so erkennt man unmittelbar, dass diese Reihen für $|x|=1$, speciell also für $x=\pm 1$ noch *unbedingt* convergiren. Andererseits bleibt von den nach Analogie des Gl. (1^b), (3^b) gebildeten Reihen:

$$(6)\quad \begin{cases} (1+x^2)\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu x^\nu = a_0 - a_1 x + \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu(a_{\nu-1}+a_\nu)x^\nu \\ (1+x)\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{[\nu/2]} b_\nu x^\nu = b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{[(\nu-1)/2]}(b_{\nu-1}+(-1)^{\nu-1}b_\nu)x^\nu \end{cases}$$

die *erste* für $x=1$, die *zweite* für $x=\pm 1$ noch *bedingt convergent*, während die *erste* für $x=-1$ (die *zweite* nur für $x=\pm i$) *divergirt*.

Setzt man also einmal $x=+1$, sodann $x=-1$, so folgt, dass die Reihen:

$$(A)\ \left\{a_0-a_1+\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu(a_{\nu-2}+a_\nu)\right\}\cdot\left\{b_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{[(\nu-1)/2]}(b_{\nu-1}+(-1)^{\nu-1}b_\nu)\right\}$$

* Dabei bedeutet [ν/2] die grösste in ν/2 enthaltene ganze Zahl.

$$(B)\quad \left\{a_0 + a_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty}(a_{\nu-2} + a_\nu)\right\} \cdot \left\{b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+[(\nu-1)/2]}(b_{\nu-1} + (-1)^{\nu-1} b_\nu)\right\}$$

unbedingt convergente Productreihen liefern, obschon die *beiden* Reihen (A) und die *zweite* (B) *nur bedingt convergiren*, während die *erste* (B) sogar *divergirt.* Die Ausführung der Multiplication nach der CAUCHY'schen Regel liefert nämlich genau dasselbe Resultat, wie für die aus (5) für $x = \pm 1$ resultirenden, *unbedingt* convergirenden Reihen:

$$(A')\quad \left\{a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(a_{\nu-1} - a_\nu)\right\} \cdot \left\{b_0 + b_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{[\nu/2]-1}(b_{\nu-2} - b_\nu)\right\}$$

$$(B')\quad \left\{a_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{\nu-1} - a_\nu)\right\} \cdot \left\{b_0 + b_1 - \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+[\nu/2]}(b_{\nu-2} - b_\nu)\right\}.$$

Will man in (A) und (B) an die Stelle des *zweiten* Factors eine *unbedingt* convergirende Reihe treten lassen, so hat man nur $\sum c_\nu$ als *unbedingt* convergent, im übrigen beliebig anzunehmen, und findet dann auf Grund der Beziehung:

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu x^\nu\right\} \cdot \left\{(1+x) \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\right\} = \left\{(1+x) \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu x^\nu\right\} \cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\right\},$$

dass die Reihen:

$$(C)\qquad \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu\right\} \cdot \left\{c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_{\nu-1} + c_\nu)\right\}$$

$$(D)\qquad \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right\} \cdot \left\{c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu(c_{\nu-1} + c_\nu)\right\}$$

wiederum *unbedingt* convergirende Productreihen liefern, nämlich solche, die identisch sind mit denjenigen der *unbedingt* convergirende Factoren:

$$(C')\qquad \left\{a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(a_{\nu-1} - a_\nu)\right\} \cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\right\},$$

$$(D')\qquad \left\{a_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{\nu-1} - a_\nu)\right\} \cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu c_\nu\right\}.$$

Die auf diese Weise gewonnenen Beispiele können auch dazu dienen, um die Richtigkeit des am Schlusse von § 1 ausgesprochenen Resultates mit den *elementarsten* Mittel der Reihenlehre zu erweisen, d. h. *ohne* im übrigen von der Theorie der *Potenzreihen*, welche zur *Auffindung* dieser Beispiele gedient hatte, irgend welchen Gebrauch zu machen. Einerseits kann nämlich der Convergenz-

Charakter sämmtlicher in $(A)-(D)$, $(A')-(D')$ auftretenden Reihen ganz unmittelbar erkannt werden. Sodann liefert die Ausführung der Multiplication nach der CAUCHY'schen Regel für $(A)-(D)$ genau dieselben Productreihen, wie für $(A')-(D')$. Schliesslich resultirt dann deren *unbedingten* Convergenz aus derjenigen aller in $(A')-(D')$ vorkommenden Reihen.

Ferner bemerke man noch folgendes. Die *unbedingte* Convergenz der in (A'), (B') vorkommenden Reihen wird in keiner Weise alterirt, wenn man a_ν durch $a_\nu + a$ *oder* bezw. *und* b_ν durch $b_\nu + b$ ersetzt, wo a, b irgend zwei positive Zahlen bedeuten. Hierdurch werden aber andererseits die entsprechenden Reihen in (A), (B) durchweg *divergent.* Daraus folgt aber:

Auch die Multiplication zweier divergenter Reihen kann eine unbedingt convergirende Reihe liefern.

§ 3.

Die in den vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate beruhten wesentlich darauf, dass man eine *bedingt convergente* oder *divergente* Reihe $\sum u_\nu$ als Specialfall von $\sum u_\nu x^\nu$ für $x=1$ auffasste. (N. B. Die Voraussetzung, dass dabei $\sum u_\nu x^\nu$ den Convergenzradius 1 besitzen sollte, ist allemal *eo ipso* erfüllt, wenn $\sum u_\nu$ *bedingt convergirt;* wenn dagegen $\sum u_\nu$ *divergirt,* so muss noch ausdrücklich angenommen werden, dass $\overline{\mathrm{L}}\, \sqrt[\nu]{|u_\nu|} = 1$). Es werde nun gesetzt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu = f(x) \quad \text{für } |x| < 1,$$

und sodann $f(X)$ für alle Stellen X auf den Convergenzkreise $|X|=1$ durch die Gleichung definirt:

$$f(X) = \mathop{\mathrm{L}}_{\rho=1-0} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu (\rho X)^\nu,$$

(sodass also nach dem bekannten ABEL'schen Grenzwerth-Satze:

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} u_\nu X^\nu,$$

sobald diese Reihe *convergirt*). Um unnöthige Complicationen zu vermeiden, mag angenommen werden, dass $f(x)$ auf dem Einheitskreise eine nur *endliche* Anzahl *gewöhnlichen* Unendlichkeits-Stellen (d. h. *ohne Oscillationen*) $x = a_\kappa$ besitze, im übrigen längs des Einheitskreises *stetig* und zum mindesten in der Nähe von $x=1$ *ohne Oscillationen* verlaufe. Die *Convergenz* oder *Divergenz* von $\sum u_\nu$ wird dann nach bekannten Sätzen aus der Theorie der FOURIER'schen Reihen einzig und allein von der *Art des Unendlichwerdens* von $f(x)$ für $x = a_\kappa$ abhängen. Befindet sich unter den Stellen a_κ mindestens *eine* solche, für welche $f(x)$ von der *ersten* oder noch *höheren* Ordnung unendlich wird, so ist $\sum u_\nu$ allemal *divergent*, da die u_ν in diesem Falle für unbegrenzt wachsende ν *nicht* gegen Null convergiren. Wohingegen $\sum u_\nu$ *convergiren* wird, wenn $f(x)$ an den Stellen a_κ durchweg von *niederer* oder, etwas genauer gesagt, von "*hinlänglich*" *niederer** Ordnung, als der *ersten* unendlich wird.

Es bedeute ferner $\sum v_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit ganz analogen Eigenschaften, und es werde gesetzt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu x^\nu = g(x) \quad \text{für } |x| < 1,$$

$$g(X) = \mathop{\mathrm{L}}_{\rho=1-0} \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu (\rho X)^\nu,$$

während die Unendlichkeits-Stellen von $g(X)$ mit β_λ bezeichnet werden mögen.

Da die Multiplication von $\sum u_\nu \cdot \sum v_\nu$ nach der CAUCHY'schen Regel genau dasselbe Resultate ergiebt, als wenn man das Product $\sum u_\nu x^\nu \cdot \sum v_\nu x^\nu$ zunächst nach Potenzen von x ordnet und sodann $x = 1$ setzt, so wird die *Convergenz* oder *Divergenz* jener ersten Productreihe lediglich davon abhängen, ob überhaupt bezw. in welcher Weise $f(x)$, $g(x)$ auf dem Convergenzkreise *unendlich* wird.

Sind die β_λ durchweg von den a_κ *verschieden*, so wird hiernach die Productreihe $\sum u_\nu \cdot \sum v_\nu$ sicher dann *convergiren*, wenn $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ einzeln *convergirten.* Daraus erklärt es sich ohne weiteres, warum zwei Reihen, wie die zu Anfang von § 2 eingeführten, nämlich:

$$\begin{matrix} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - + - \cdots \\ b_0 + b_1 - b_2 - b_3 + + - - - \cdots \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} a_{\nu+1} \leqq a_\nu, \ \mathrm{L}\, a_\nu = 0 \\ b_{\nu+1} \leqq b_\nu, \ \mathrm{L}\, b_\nu = 0 \end{pmatrix}$$

allemal ein *convergentes* Product liefern,† mögen die a_ν, b_ν auch *noch so langsam* gegen Null abnehmen.

Es können sich aber, immer unter der voraussetzung $\beta_\lambda \neq a_\kappa$, die Convergenz-Chancen für die Productreihe auch erheblich *günstiger* gestalten, als für die Einzelreihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$, nämlich *dann*, wenn $\sum u_\nu x^\nu$ die β_λ, $\sum v_\nu x^\nu$ die a_κ in's gesammt oder doch theilweise zu *Nullstellen* hat. Eine Illustration hierzu liefern die Betrachtungen der beiden vorangehenden Paragraphen.

---

* d. h. *so*, dass $f(x)$ bei $x = a_\kappa$ *integrabel* bleibt, wie z. B.

$$\left(\frac{1}{x - a_\kappa}\right)^{1-\epsilon} \quad (0 < \epsilon < 1), \qquad \frac{1}{(x - a_\kappa)\,[lg(x - a_\kappa)]^{1+\rho}} \quad (\rho < 0).$$

Wird $f(x)$ zwar von *niederer*, als der *ersten*, jedoch *nicht integrabel-unendlich*, wie z. B.

$$\frac{1}{(x - a_\kappa)\, lg(x - a_\kappa)},$$

so muss noch eine gewisse Bedingung hinzukommen, wenn $\mathrm{L} u^\nu = 0$ werden soll. Vgl. RIEMANN, Ges. W., pp. 244–245. Münchener Berichte, Bd. 25 (1895), pp. 339–362.

† Mathematische Annalen, Bd. 21 (1883), p. 346.

Hingegen tritt nun allemal eine *Verschlechterung* der Convergenz-Chancen für die Productreihe ein, sobald irgend ein β_λ mit einem a_κ *zusammenfällt*, da hierdurch für $f(x)\cdot g(x)$ eine Unendlichkeits-Stelle von entsprechend zusammengesetzter *höherer* Ordnung erzeugt wird: sobald diese Ordnung die *erste* erreicht oder übersteigt, muss dann die Productreihe allemal *divergiren.*

Aus dieser Bemerkung erklärt sich nun aber in sehr einfacher Weise die von Herrn Cajori * hervorgehobene Thatsache, dass die Potenzen gewisser bedingt convergirender Reihen—wie $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(-1)^{\nu-1}\nu^{-r}$ $(0<r<1)$—*aufhören zu convergiren,* sobald der Exponent q eine bestimmte, von r abhängige Zahl erreicht oder übersteigt; während für andere Reihen—wie $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(-1)^{\nu-1}\nu^{-1}$ —jede noch so hohe Potenz eine *convergente* Reihe liefert. Von den beiden Reihen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu^r},\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu}$$

wird nämlich für $x=-1$ die *erste so* unendlich,† wie $-(1+x)^{-(1-r)}$, die *zweite,* wie $lg(1+x)$. Erhebt man also die *erste* Reihe in die q-te Potenz, so entsteht bei $x=-1$ eine Unendlichkeits-Stelle mit der Ordnungszahl $q(1-r)$, und es tritt daher *Divergenz* ein, sobald:

$$q(1-r)\geqq 1,\ \text{ d. h. } q\geqq\frac{1}{1-r},\ \text{ anders geschrieben: } r\leqq 1-\frac{1}{q}.$$

Dagegen werden die Potenzen der *zweiten* Reihe für beliebig grosse Exponenten q bei $x=-1$ immer nur eine Unendlichkeits-Stelle vom Typus $[lg(1+x)]^q$ besitzen, sodass also die *Convergenz* erhalten bleibt.

§ 4.

Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um eine Lücke auszufüllen, die mir bei der Durchsicht meiner zu Anfang dieser Note citirten Abhandlung ("*Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen*") aufgefallen ist. Daselbst (a. a. o., p. 363) wird der folgende Satz ausgesprochen:

Sind a_n, b_n positive, mit wachsendem n niemals zunehmende und für $n=\infty$ verschwindende Zahlen, so bildet die Beziehung:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} b_n\sum_{\kappa=1}^{n}a_\kappa=\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} a_n\sum_{\kappa=1}^{n}b_\kappa=0$$

die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für Anwendbarkeit der Multiplicationsregel auf die bedingt convergenten Reihen:

---

* A. a. O., p. 25. American Journal of Mathematics, vol. 18, p. 201.

† Nach einem Satze von P. Appell: Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 690. (Auch bei Picard, *Traité d'Analyse*, T. I, p. 210).

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu} a_{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu} b_{\nu}.$$

Der Beweis dafür, dass die obige Bedingung *hinreicht*, wird an der betreffenden Stelle richtig geführt. Dagegen ist der dort gegebene Beweis für deren *Nothwendigkeit* nicht nur von überflüssiger Umständlichkeit, sondern in Folge der Benützung gewisser aus den gemachten Voraussetzungen noch keineswegs folgenden Beziehungen, nämlich:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = 1, \quad \mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} \nu\left(1 - \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}}\right) > 1,$$

sogar unzulänglich. In Wahrheit ergiebt sich aber die *Nothwendigkeit* der fraglichen Bedingung ganz unmittelbar in folgender Weise. Die Ausführung der Multiplication nach der CAUCHY'schen Regel liefert die Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu} c_{\nu}, \quad \text{wo:} \quad c_n = \sum_{\kappa=0}^{n} a_{\kappa} b_{n-\kappa} \begin{cases} > b_n \sum\limits_{\kappa=0}^{n} a_{\kappa} \\ > a_n \sum\limits_{\kappa=0}^{n} b_{\kappa}. \end{cases}$$

Da aber die Bedingung $\mathrm{L}\, c_n = 0$ eine für die *Convergenz* der Reihe $\sum(-1)^{\nu} c_{\nu}$ jedenfalls *nothwendige* ist, so gilt dies *a fortiori* von der Beziehung:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} b_n \sum_{\kappa=0}^{n} a_{\kappa} = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} a_n \sum_{\kappa=0}^{n} b_{\kappa} = 0.$$

MÜNCHEN, 31. März 1901.