UEBER CURVENINTEGRALE IM m–DIMENSIONALEN RAUM*

VON

LOTHAR HEFFTER

In den Göttinger Nachrichten (vorgelegt am 8. Feb. 1902) habe ich die Definition der längs einer ebenen Curve erstreckten Integrale in gewisser Hinsicht erweitert und dabei von dem Integrationsweg $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ nur vorausgesetzt, dass ϕ und ψ in dem betrachteten Intervall beschränkte Schwankung haben. An diese Definition habe ich die Hauptsätze der Theorie der ebenen Curvenintegrale und schliesslich den CAUCHY'schen Integralsatz angeknüpft.

Hier möchte ich in Kürze ausführen, wie sich jene Begriffsbestimmungen und Methoden auf einfache Integrale ausdehnen lassen, deren Integrationsweg eine aus einer m-fachen herausgeschnittene einfache Manigfaltigkeit ist. Die folgenden Entwicklungen gelten also z. B. für die längs einer Raumcurve erstreckten Integrale.

Die Arbeit in den Göttinger Nachrichten über Curvenintegrale soll im folgenden kurz mit C. I. citiert werden.

§ 1. *Definition des Curvenintegrals.*

Die reellen Functionen der reellen Variabelen t

$$x_1 = \phi_1(t),\ x_2 = \phi_2(t),\ \cdots,\ x_m = \phi_m(t) \tag{1}$$

seien in dem Intervall $(t_0 T)$ *eindeutig, mit Einschluss der Grenzen stetig, und von beschränkter Schwankung*,† d. h. wenn der arithmetischen Folge der Werte

$$t = t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\ (\equiv T)$$

nach (1) die Werte

$$x_i = x_{i0}\ (\equiv a_i),\ x_{i1},\ \cdots,\ x_{in}\ (\equiv b_i) \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

entsprechen, sei

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} | x_{ik} - x_{i,k-1} | = M_i \qquad (i=1, 2, \cdots, m), \tag{2}$$

wo die M_i bestimmte endliche positive Zahlen sind und mit wachsendem n die

* Presented to the Society at the Evanston meeting, September 3, 1902. Received for publication April 28, 1902.

† Vgl. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2me éd., I (1893), S. 55; STUDY, Mathematische Annalen, Bd. 47 (1896), S. 298 ff.

Differenzen $t_k - t_{k-1}$ sämmtlich nach Null convergieren. Die durch (1) definierte einfache Manigfaltigkeit nennen wir eine *stetige*, *rektifizierbare Curve* C in dem m-dimensionalen Raum der (x_i) mit dem Anfangspunkt A $(x_i = a_i)$ und dem Endpunkt B $(x_i = b_i)$.

Aus der Stetigkeit der Funktionen ϕ_i im Intervalle $(t_0 T)$ mit Einschluss der Grenzen folgt ihre gleichmässige Stetigkeit in $(t_0 T)$. Man kann also die Bedingungen

$$(3) \qquad |\phi_i(t) - \phi_i(t_c)| < \epsilon \text{ für } |t - t_c| < \delta \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

wo auch t_c in $(t_0 T)$ liegt, bei demselben beliebig kleinen ϵ durch dieselbe Zahl δ erfüllen. Wählt man also die Differenzen $t_k - t_{k-1}$ sämmtlich $< 2\delta$, so verläuft C vom Punkte $(x_{i,k-1})$ bis zum Punkte (x_{ik}) stets ganz innerhalb des Raumes R_k, der durch die Grenzen

$$(4) \qquad \phi_i\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) - \epsilon \leqq x_i \leqq \phi_i\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) + \epsilon^* \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

bestimmt und für $m = 3$ bei rechtwinkligen Parallelcoordinaten x_1, x_2, x_3 ein Würfel ist, dessen Mittelpunkt auf C liegt.

Ferner sei $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ eine längs C *reelle, eindeutige und mit Einschluss der Grenzen A und B stetige Function der reellen Variabeln* $x_1, \cdots, x_m$. Also ist auch f längs C von A bis B *gleichmässig stetig*, d. h. die Bedingung

$$(5) \quad |f(x_1, \cdots, x_m) - f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m)| < \gamma \text{ für } |x_i - \bar{x}_i| < \epsilon \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ist, wo auch $(\bar{x}_i)$ auf C zwischen A und B liegt, bei ein für alle Mal beliebig klein gewähltem γ durch dieselbe hinlänglich kleine Zahl ϵ zu erfüllen. Dieses ϵ wählen wir in (3) und bestimmen danach δ gemäss (3). Die Function f schwankt dann in R_k um weniger als 2γ.

Ist die Bedingung (5) ohne weitere Beschränkung für die Lage von (x_i) erfüllt, so können wir auch sagen: *C verläuft in einem Bereich der Stetigkeit von f.*† Muss, um (5) zu erfüllen, (x_i) auf C selbst liegen, so sagen wir: *f ist stetig nur längs C selbst* oder auch: *C ist eine isolierte Curve der Stetigkeit von f.*

Nun sei (ξ_{ik}) ein Punkt des Bereiches,

$$(6) \qquad x_{i,k-1} \leqq \xi_{ik} \leqq x_{ik} \quad \text{bezw.} \quad x_{i,k-1} \geqq \xi_{ik} \geqq x_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

der ganz innerhalb R_k liegt, bezw. wenn f nur längs C selbst stetig ist, ein gemäss (6) auf C liegender Punkt. Dann bilden wir die Summe

$$(7) \qquad S = \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_{1k}, \cdots, \xi_{mk})(x_{ik} - x_{i,k-1})$$

* C. I., S. 119 steht in den entsprechenden Formeln irrtümlicher Weise $\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})$ statt $\frac{1}{2}(t_{k-1} + t_k)$.

† Diesen Fall, der der wichtigste ist, wollen wir hier der Einfachheit wegen später allein weiter verfolgen. Bei der Definition des Integrals braucht er aber *nicht* vorzuliegen.

und zeigen, dass sie einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wenn n in's Unendliche wächst; die Intervalle $(t_{k-1}\, t_k)$ aber sämmtlich nach Null convergieren.

Hierzu teilen wir jedes Intervall $(t_{k-1}\, t_k)$ durch neue Teilpunkte

$$t'_1, t'_2, \cdots, t'_{n_k-1}$$

und bilden wie in (7) die Summen

$$(8) \qquad S' = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k'=1}^{k'=n_k} f(\xi'_{1k'}, \cdots, \xi'_{mk'})\,(x_{i\,k\,k'} - x_{i\,k\,k'-1})$$

wo $x_{ikk'} = \phi_i(t'_{k'})$, $x_{ik0} = x_{i,\,k-1}$, $x_{ikn_k} = x_{ik}$ und alle $(\xi'_{ik'})$ entsprechend gewählt sind wie die (ξ_{ik}) bei S. Da sie hiernach sämmtlich in dem Bereich R_k (s. (4)) liegen, in dem f um weniger als 2γ schwankt, so ist

$$(9) \qquad f(\xi_{1k}, \cdots, \xi_{mk}) - 2\gamma < f(\xi'_{1k'}, \cdots, \xi'_{mk'}) < f(\xi_{1k}, \cdots, \xi_{mk}) + 2\gamma,$$

oder

$$(10) \qquad f(\xi'_{1k'}, \cdots, \xi'_{mk'}) = f(\xi_{1k}, \cdots, \xi_{mk}) + 2\gamma\,\vartheta_{kk'},$$

wo

$$-1 < \vartheta_{kk'} < +1.$$

Also ist

$$(11) \qquad S' = S + 2\gamma \sum_k \sum_{k'} \vartheta_{kk'}(x_{i\,k\,k'} - x_{i\,k\,k'-1})$$

und

$$(12) \qquad |S' - S| < 2\gamma \sum_{k,\,k'} |x_{i\,k\,k'} - x_{i\,k\,k'-1}| < 2\gamma M_i,$$

d. h. nach (2) beliebig klein.

Die Summe S hat also einen bestimmten endlichen Grenzwert, den wir *das in Bezug auf x_i längs C von A bis B erstreckte Integral von f nennen.* Wir schreiben

$$(13) \qquad (C)\int_A^B f(x_1, \cdots, x_m)\,dx_i = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_{1k}, \cdots, \xi_{mk})(x_{ik} - x_{i,\,k-1}).$$

Analog definieren wir unter denselben Voraussetzungen über $f_i(x_1, \cdots, x_m)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ das Integral

$$(14)\ (C)\int_A^B \sum_{i=1}^{i=m} f_i(x_1, \cdots, x_m)\,dx_i = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=m} f_i(\xi_{1k}, \cdots, \xi_{mk})\,(x_{ik} - x_{i,\,k-1}).$$

Hieran schliessen sich dieselben oder ganz analoge Bemerkungen wie C. I., I., § 1.

§ 2. *Das Curvenintegral als Grenzwert einer Summe, deren Glieder gewöhnliche bestimmte Integrale sind.*

Die Punkte (x_{ik}) $(k = 0, 1, \cdots, n)$ mögen auf C schon so nahe an einander liegen, dass auch die Punkte

$$(x_{1k}, x_{2,k-1}, \cdots, x_{m,k-1}), (x_{1k}, x_{2k}, x_{3,k-1}, \cdots, x_{m,k-1}), \cdots$$

und die geradlinigen Verbindungsstrecken zwischen je zwei aufeinander folgenden von ihnen, d. h. z. B. alle Punkte $(x_1, x_{2,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})$, wo x_1 dem Intervalle $(x_{1,k-1}\, x_{1k})$ angehört, ganz innerhalb des Gebietes liegen, in dem die f_i eindeutig und stetig sind. Betrachten wir dann die Summe von *gewöhnlichen* bestimmten Integralen

$$\begin{aligned}(1)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \Big\{ \int_{x_{1,k-1}}^{x_{1k}} & f_1(x_1, x_{2,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})\, dx_1 \\ & + \int_{x_{2,k-1}}^{x_{2k}} f_2(x_{1k}, x_2, x_{3,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})\, dx_2 + \cdots \\ & + \int_{x_{m,k-1}}^{x_{mk}} f_m(x_{1k}, \cdots, x_{m-1,k}, x_m)\, dx_m \Big\},\end{aligned}$$

so kann man auf jedes dieser Integrale den Satz vom Mittelwert der Integrandenfunction anwenden und hat z. B.

$$\begin{aligned}(2)\qquad \int_{x_{1,k-1}}^{x_{1k}} & f_1(x_1, x_{2,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})\, dx_1 \\ & = f_1(\xi_{1k}, x_{2,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})(x_{1k} - x_{1,k-1}),\end{aligned}$$

wo ξ_{1k} dem Intervalle $(x_{1,k-1} x_{1k})$ angehört. Hierdurch geht aber die Summe (1) in diejenige über, deren Grenzwert für $\lim n = \infty$ das längs C von A bis B erstreckte Curvenintegral von $f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m$ ist. Also ist

$$\begin{aligned}(3)\qquad (C)\int_A^B \sum_{i=1}^{i=m} & f_i(x_1, \cdots, x_m)\, dx_i \\ & = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=m} \int_{x_{i,k-1}}^{x_{ik}} f_i(x_{1k}, \cdots, x_{i-1,k}, x_i, x_{i+1,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})\, dx_i,\end{aligned}$$

d.h. *das Curvenintegral ist als Grenzwert einer Summe von gewöhnlichen bestimmten Integralen oder als Grenzwert eines sog. "Treppenintegrals" dargestellt.*

Die innere Summe in (3) rechts oder das Treppenintegral von $(x_{i,k-1})$ bis (x_{ik}) kann natürlich auf $m!$ verschiedene Arten gebildet werden, von denen in (3) nur eine aufgeschrieben ist.

§ 3. *Fundamentalsatz der Integralrechnung.*

Ist $F(x_1, \cdots, x_m)$ mit ihren ersten partiellen Ableitungen

$$(1)\qquad | F_i(x_1, \cdots, x_m) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \cdots, m),$$

längs C von A bis B stetig, so ist

$$(2)\qquad (C)\int_A^B dF(x_1, \cdots, x_m) \equiv (C)\int_{(a_i)}^{(b_i)} \sum_{i=1}^{i=m} F_i dx_i$$
$$= F(b_1, \cdots, b_m) - F(a_1, \cdots, a_m)$$

Den Beweis dieses Satzes könnten wir genau wie in C. I., I, § 2 führen, also ohne den Satz schon für $m = 1$ als bewiesen vorauszusetzen. Oder aber, und das soll hier geschehen, wir machen diese Voraussetzung und lesen dann aus dem vorigen Paragraphen das gewünschte Resultat ab. Nach dem Fundamentalsatz der gewöhnlichen Integralrechnung ist nämlich in § 2 (3), wo die f_i jetzt durch F_i zu ersetzen sind,

$$(3)\qquad \int_{x_{i,k-1}}^{x_{ik}} F_i(x_{1k}, \cdots, x_i, \cdots, x_{m,k-1})\, dx_i$$
$$= F(x_{1k}, \cdots, x_{ik}, x_{i+1,k-1}, \cdots, x_{m,k-1})$$
$$- F(x_{1k}, \cdots, x_{i,k-1}, x_{i+1,k-1}, \cdots, x_{m,k-1}).$$

Also wird die innere Summe in § 2 (3) rechts

$$(4)\qquad F(x_{1n}, \cdots, x_{mn}) - F(x_{10}, \cdots, x_{m0}) = F(b_1, \cdots, b_m) - F(a_1, \cdots, a_m),$$

q.e.d.

Auch die *Transformation des Curvenintegrals* durch Einführung neuer Variablen statt $x_1, \cdots, x_m$ erledigt sich ganz analog wie C. I., I, § 3.

§ 4. *Das Curvenintegral als Function der (oberen) Grenze bei vorausgesetzter Eindeutigkeit.*

In bekannter Weise, d. h. genau wie z. B. in den C. I., I, § 4 citierten Abhandlungen beweist man endlich auch hier den Satz:

Sind $f_i(x_1, \cdots, x_m)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ in dem zusammenhängenden Bereich G eindeutig und stetig und ist das Integral

$$(1)\qquad (C)\int_{(a_i)}^{(x_i)} \sum_{i=1}^{i=m} f_i dx_i,$$

in diesem Bereich unabhängig vom Wege C, m. a. W. selbst eine eindeutige Function f von $x_1, \cdots, x_m$ in G, so ist es in G auch eine stetige Function von $x_1, \cdots, x_m$ mit den partiellen Ableitungen

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

§ 5. *Der Cauchy'sche Satz.*

Wenn G ein solcher zusammenhängender m-dimensionaler Bereich in der m-fachen Mannigfaltigkeit $(x_1, \cdots, x_m)$ ist, dass jede geschlossene Curve in G durch stetige Deformation innerhalb G auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, so wollen wir G kurz *einfach zusammenhängend* nennen. Als Cauchy'schen Integralsatz bezeichnen wir dann hier denjenigen, der die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angiebt, dass längs jeder im Innern von G verlaufenden geschlossenen Curve C das Integral

$$(1) \qquad (C)\int \sum_{i=1}^{i=m} f_i dx_i .$$

den Wert Null hat.

In G seien die f_i eindeutig und stetig und *entweder* die

$$f_{ik} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, m; i \neq k),$$

ebenfalls eindeutig und stetig *oder* die ersten vollständigen Differentialien df_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ in G überall einwertig vorhanden.

Nach § 2 können wir das Integral (1) zunächst als Grenzwert eines geschlossenen Treppenintegrals mit den auf C liegenden Ecken

$$(x_{i0}), (x_{i1}), \cdots, (x_{in}) [\equiv (x_{i0})],$$

auffassen, dessen Treppenlinie auch ganz innerhalb G liegt. Teilen wir jetzt G durch lauter $(m - 1)$-fache Manigfaltigkeiten

$$x_1 = C_1, C_1', \cdots, x_2 = C_2, C_2', \cdots, x_m = C_m, C_m', \cdots,$$

wo unter den Werten der Constanten C_i, C_i', $\cdots$ jedenfalls die Werte

$$x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{in}$$

vorkommen $(i = 1, 2, \cdots, m)$, so zerfällt G in lauter Teilgebiete, die wir "*Zellen*" nennen wollen. Bei $n = 2$ sind dies Rechtecke, bei $n = 3$ rechtwinklige Parallelepipeda mit Kanten parallel zu den Coordinatenaxen, wenn orthogonale Cartesische Coordinaten zu Grunde liegen.

Damit nun der Cauchy'sche Satz für jede geschlossene Curve in einer zweifachen Manigfaltigkeit gilt, bei der alle x constant sind ausser etwa x_i und x_k, ist bei den gemachten Voraussetzungen notwendig und hinreichend (s. C. I., II), dass

$$(2) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, m; i \neq k).$$

Er gilt dann aber auch, wie durch Zusammensetzung solcher Wege folgt, für jeden geschlossenen Kantenzug auf einer Zelle. Wieder durch Zusammensetzung gelangt man zur Giltigkeit für einen geschlossenen Kantenzug, der auf zwei und dann auf beliebig vielen, mit einander in Verbindung stehenden Zellen so verläuft, dass er durch solche rückwärts ausgeführten Abänderungen in einen geschlossenen Kantenzug auf einer einzigen Zelle reduciert werden kann.

Die oben eingeführte Treppenlinie ist nun infolge der Zerschneidung von G in Zellen ein solcher geschlossener Kantenzug und, weil G einfach zusammenhängend ist, kann sie auch in der angegebenen Weise reduciert werden. Der CAUCHY'sche Satz gilt also für jene Treppe, folglich für einen beliebigen geschlossenen Weg in G, und wir haben das Resultat:

Ist G ein einfach zusammenhängender m-dimensionaler Bereich in der m-fachen Manigfaltigkeit $(x_1, \cdots, x_m)$, *sind* $f_i(x_1, \cdots, x_m)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ *in G eindeutige und stetige Functionen aller Variablen und entweder die f_{ik} ebenfalls eindeutige und stetige Functionen von ihnen in G,—oder existieren die ersten totalen Differentialien df_i in G überall einwertig, so sind die in G geltenden Bedingungen*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, m;\ i \neq k). \tag{2}$$

notwendig und hinreichend dafür, dass

$$(C)\int_A^B \sum_{i=1}^{i=m} f_i dx_i$$

in G unabhängig vom Integrationsweg ist.

GOERLITZ, *5. April 1902.*