ZUR GRUPPENTHEORIE MIT ANWENDUNGEN AUF DIE THEORIE DER LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN*

VON

ALFRED LOEWY

Es seien r lineare homogene Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_r$ der Grade $n_1, n_2, \cdots, n_r$ gegeben:

$$(A_1) \qquad x_{i_1}^{(1)} = \sum_{s_1=1}^{s_1=n_1} a_{i_1 s_1}^{(1)} \xi_{s_1}^{(1)} \qquad (i_1 = 1, 2, \cdots, n_1),$$

$$(A_2) \qquad x_{i_2}^{(2)} = \sum_{s_2=1}^{s_2=n_2} a_{i_2 s_2}^{(2)} \xi_{s_2}^{(2)} \qquad (i_2 = 1, 2, \cdots, n_2),$$

$$\vdots$$

$$(A_r) \qquad x_{i_r}^{(r)} = \sum_{s_r=1}^{s_r=n_r} a_{i_r s_r}^{(r)} \xi_{s_r}^{(r)} \qquad (i_r = 1, 2, \cdots, n_r).$$

Durch Multiplication erhält man:

$$x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_r}^{(r)} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} a_{i_1 k_1}^{(1)} a_{i_2 k_2}^{(2)} \cdots a_{i_r k_r}^{(r)} \xi_{k_1}^{(1)} \xi_{k_2}^{(2)} \cdots \xi_{k_r}^{(r)};$$

linker Hand ist dem Index i_1 jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n_1$, dem Index i_2 jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n_2$, u. s. w., dem Index i_r jede der Zahlen $1, 2, \cdots n_r$ beizulegen. Ebenso ist in der Summe rechts für k_1 jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n_1$, für k_2 jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n_2$, u. s. w., für k_r jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n_r$ zu setzen. Die $n_1 n_2 \cdots n_r$ Producte $x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_r}^{(r)}$ stellen sich offenbar als lineare homogene Functionen der $n_1 n_2 \cdots n_r$ Producte $\xi_{i_1}^{(1)} \cdot \xi_{i_2}^{(2)} \cdots \xi_{i_r}^{(r)}$ dar. Die so entstandene Transformation heisst nach Herrn A. HURWITZ† die Producttransformation von $A_1, A_2, \cdots, A_r$, und wird mit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ bezeichnet.

Für die Producttransformationen gelten folgende leicht beweisbare Sätze. Bezüglich der Herleitung vgl. man HURWITZ a. a. O. oder auch C. STEPANOS,‡ der über diesen Gegenstand eingehende Untersuchungen angestellt hat:

* Presented to the Society at the Boston meeting, August 31—September 1, 1903. Received for publication July 1, 1903.

† A. HURWITZ, *Zur Invariantentheorie*, Mathematische Annalen, 45 (1894), S. 388. Die zu $A_1 \times A_2$ gehörige Determinante ist von KRONECKER in seinen Vorlesungen benützt worden. Vgl. NETTO in der Encyklopädie der math. Wiss., Bd. I, S. 40.

‡ C. STEPHANOS, *Sur une extension du calcul des substitutions linéaires*, Journal de mathématiques, Ser. 5, Bd. 6 (1900), S. 82. STEPHANOS nennt die fragliche Operation conjonction.

Sind $B_1, B_2, \cdots B_r$ r weitere lineare homogene Transformationen, aus denen die Producttransformation $B_1 \times B_2 \cdots \times B_r$ gebildet sei, so gilt die Relation:

$$(\mathrm{I}) \qquad (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)\cdot(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r) = (A_1 B_1 \times A_2 B_2 \times \cdots \times A_r B_r).$$

Die Producttransformation der inversen Transformationen von $A_1, A_2, \cdots, A_r$ ist die inverse Transformation der Producttransformation von $A_1, A_2, \cdots, A_r$, folglich ist:

$$(\mathrm{II}) \qquad (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)^{-1} = A_1^{-1} \times A_2^{-1} \times \cdots \times A_r^{-1}.$$

Durchläuft A_1 sämtliche Elemente eine Gruppe linearer homogener Substitutionen, ebenso A_2 die sämtlichen Elemente einer Gruppe linearer homogener Substitutionen, u. s. w., schliesslich A_r die sämtlichen Elemente einer Gruppe linearer homogener Substitutionen, so bildet die Gesamtheit von linearen homogenen Substitutionen $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$, welche auf diese Weise entstehen, auch eine Gruppe. *

Auf das gruppentheoretische Princip, welches in der Producttransformation liegt, hat übrigens schon Herr C. JORDAN in seinem *Traité des substitutions et des équations algébriques* † hingewiesen. Man kann nämlich auch auf folgende Weise zur Producttransformation gelangen: Es sei

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} c_{i_1 i_2 \cdots i_r} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_r}^{(r)}$$

eine Form, die in den r Variablenreihen $x_{i_1}^{(1)}$ $(i_1 = 1, 2, \cdots, n_1)$, $x_{i_2}^{(2)}$ $(i_2 = 1, 2, \cdots, n_2)$, $\cdots$, $x_{i_r}^{(r)}$ $(i_r = 1, 2, \cdots, n_r)$ linear und homogen ist. Transformirt man die angegebene Form durch die Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_r$ in die neue r fach lineare Form:

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} c'_{i_1 i_2 \cdots i_r} \xi_{i_1}^{(1)} \xi_{i_2}^{(2)} \cdots \xi_{i_r}^{(r)},$$

so wird:

$$c'_{k_1 k_2 \ldots k_r} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 k_1}^{(1)} a_{i_2 k_2}^{(2)} \cdots a_{i_r k_r}^{(r)} c_{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

d. h. aber die $n_1 n_2 \cdots n_r$ Coefficienten $c'_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ werden durch $A_1' \times A_2' \cdots \times A_r'$ transformirt; dabei bedeuten $A_1', A_2' \cdots, A_r'$ die transponirten Substitutionen zu $A_1, A_2, \cdots, A_r$. ‡

* Die Producttransformation wird auch in der FROBENIUS'schen Theorie der Composition der Charaktere einer endlichen Gruppe verwandt. Vgl. FROBENIUS, *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsber. der Kgl. preussischen Akademie der Wiss. (1899), S. 330; W. BURNSIDE, *On the composition of the group-characteristics*, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 34 (1901), p. 41.

† a. a. O., S. 221.

‡ Vgl. HURWITZ, a. a. O., S. 394. Siehe auch FRANKLIN, *Note on induced linear substitutions*, American Journal of Mathematics, vol. 16 (1894), p. 206.

Ist A eine gegebene lineare homogene Substitution und wird

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_r = A$$

gesetzt, also ist $A \times A \times A \times \cdots \times A$ genau r mal zu nehmen, so bezeichne ich diese Operation mit Herrn ISSAI SCHUR * als $\Pi_r A$; da für $r=1$ $\Pi_1 A = A$ ist, nehmen wir $r > 1$ an.

Ist A eine gegebene Substitution:

$$(1) \qquad x_i = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} \xi_s \qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

so denke man sich, um $\Pi_r A$ zu erhalten, die Substitution A in den zweimal r Variablensystemen $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \cdots, x_i^{(r)}$ bez. $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \cdots, \xi_i^{(r)}$ geschrieben:

$$(1') \qquad x_i^{(1)} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} \xi_s^{(1)},\ x_i^{(2)} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} \xi_s^{(2)}, \cdots, x_i^{(r)} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} \xi_s^{(r)} \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

Dann wird:

$$(2) \qquad x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_r}^{(r)} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_r k_r} \xi_{k_1}^{(1)} \xi_{k_2}^{(2)} \cdots \xi_{k_r}^{(r)};$$

für die Indices $i_1, i_2, \cdots, i_r$ linker Hand ist jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ zu setzen; ebenso ist in der Summe rechter Hand für $k_1, k_2, \cdots, k_r$ jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ zu nehmen. Wir bezeichnen die n^r verschiedenen Producte $x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_r}^{(r)}$ mit $X_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ und analog die n^r Producte $\xi_{i_1}^{(1)} \xi_{i_2}^{(2)} \cdots \xi_{i_r}^{(r)}$ mit $\Xi_{i_1 i_2 \ldots i_r}$; dann haben wir die auf n^r Variable sich beziehende Transformation $\Pi_r A$. Sie lautet:

$$(3) \qquad X_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_r k_r} \Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}.$$

Werden in (2) die oberen Indices $1, 2, \cdots, r$ bei den x und ξ fortgelassen, so entstehen die Producte $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$; ihre Anzahl ist bekanntlich $\binom{n+r-1}{r}$, nämlich gleich der Zahl, die angiebt, auf wieviele Arten man n Zahlen zu r mit Wiederholung combiniren kann. Diese $\binom{n+r-1}{r}$ Producte $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ transformiren sich linear in die $\binom{n+r-1}{r}$ Producte $\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_r}$.

Die zugehörige lineare Transformation heisse nach Herrn HURWITZ' † Vorgang die $r$te *Potenztransformation* von A und werde mit $P_r A$ bezeichnet. Für sie gelten dann die Sätze: Sind A und B zwei Substitutionen, so ist $P_r A \cdot P_r B = P_r (AB)$, ‡ ferner ist $P_r (A^{-1}) = (P_r A)^{-1}$.

---

* ISSAI SCHUR, *Über eine Klasse von Matricen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Berliner Dissertation, 1901, S. 20. Mit $\Pi_r A$ beschäftigt sich auch W. BURNSIDE's Arbeit, *On the characteristic equations of certain linear substitutions*, Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, vol. 32 (1901), p. 80.

† HURWITZ, a. a. O., S. 390.

‡ Die Litteratur über die Potenztransformationen findet man bei I. SCHUR, a. a. O., S. 17. Hierzu ist noch beizufügen: W. BURNSIDE, a. a. O.; G. RADOS, *Inducirte lineare Substitutionen*, Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 16 (1898), S. 241.

$P_r A$ und $\Pi_r A$ sind von einander verschieden, ausgenommen für $n=1$, d. h. wenn A eine Substitution in einer einzigen Variablen ist. *Dieser triviale Fall* $n=1$ *soll im Folgenden ausgeschlossen sein.*

Sind $l_1, l_2, \cdots, l_r$ irgend r unter einander verschiedene der n Zahlen $1, 2, \cdots, n$, die in der Reihenfolge $l_1 < l_2 \cdots < l_r$ gewählt sein sollen, so bilde man für jede mögliche Wahl der Zahlen $l_1, l_2, \cdots, l_r$ die Determinante:

$$(4) \qquad T_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(1)} & x_{l_2}^{(1)} & \cdots & x_{l_r}^{(1)} \\ x_{l_1}^{(2)} & x_{l_2}^{(2)} & \cdots & x_{l_r}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ x_{l_1}^{(r)} & x_{l_2}^{(r)} & \cdots & x_{l_r}^{(r)} \end{vmatrix}.$$

Solcher Determinanten giebt es $\binom{n}{r}$, nämlich soviele, als man n Zahlen zu r verschiedenen combiniren kann. r muss $\leqq n$ sein. Transformirt man die r Variablensysteme $x_i^{(1)}, x_i^{(1)}, \cdots, x_i^{(r)}$ cogredient durch die Substitution A nach (1′), so erfahren die $\binom{n}{r}$ Determinanten $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ auch eine lineare Substitution. Diese nennt Herr Hurwitz* die $r$te *Determinantentransformation*; sie werde nach ihm mit $C_r A$ bezeichnet. Da $C_1 A = A$ ist, so soll bei $C_r A$, für welches $r \leqq n$ ist, auch $r=1$ ausgeschlossen werden.

Durchläuft A die Elemente einer *Gruppe G linearer homogener Substitutionen*, und bildet man zu jeder Substitution A von G die Substitution $\Pi_r A$, so erhält man eine zu G isomorphe Gruppe, die mit $\Pi_r G$ bezeichnet sei.

Auf gleiche Art und Weise können aus G eine Gruppe $P_r G$ und eine Gruppe $C_r G$ hergeleitet werden, indem man zu jeder Substitution A von G die Substitutionen $P_r A$ bez. $C_r A$ bildet. $C_r G$ existirt nur für $1 < r \leqq n$, wenn G eine Gruppe in n Variablen ist.

$H_r A$ soll diejenige Substitution sein, welche durch die zerlegbare Matrix:

$$(5) \qquad \begin{matrix} P_r A & 0 \\ 0 & C_r A \end{matrix}$$

bestimmt ist; für $r \geqq n+1$ ist unter $H_r A$ einfach $P_r A$ zu verstehen. $H_1 A$, das im Folgenden auch verwandt werden wird, soll A sein. Ordnet man einer jeden Substitution A einer Gruppe G linearer homogener Substitutionen die Substitution $H_r A$ zu, so bildet die Gesamtheit der Substitutionen $H_r A$, welche

---

* HURWITZ, a. a. O., S. 392. Die Litteratur über die Determinantentransformation ist sehr ausgedehnt. Bezüglich der Litteratur sei verwiesen auf VAHLEN, Encyklopädie der math. Wiss., Bd. I, S. 594 und LUDW. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, II_1, S. VIII (Zehnter Abschnitt, zweites Capitel). Hierzu ist die von WEIERSTRASS stammende in BALTZER'S *Determinantentheorie* (4. Aufl. 1875), S. 55 übergegangene Bemerkung beizufügen. Vgl. auch L. E. DICKSON, *Linear groups with an exposition of the Galois Field theory*, S. 145 ff. sowie A. LOEWY, *Über Differentialgleichungen, die mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören*, Sitzungsber. der math. phys. Klasse der kgl. bayer. Akademie der Wiss. (1902), S. 5.

allen Substitutionen A von G entsprechen, eine zu G isomorphe Gruppe; diese sei mit $H_r G$ oder auch mit

$$(5') \qquad \begin{matrix} P_r G & 0 \\ 0 & C_r G \end{matrix}$$

bezeichnet.

Im § 1 beweise ich:

Ist A eine lineare homogene Substitution, so werden bei gegebenem $r\,(r > 1)$ gleichzeitig alle Substitutionen $\Pi_r A$, wobei für A jede Substitution der gleichen Variablenzahl gesetzt werden darf, durch eine und dieselbe Substitution S von nicht verschwindender Determinante in die Form:

$$(6) \qquad S\Pi_r A S^{-1} = \begin{matrix} H_r A & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$$

übergeführt; A_{21} und A_{22} bedeuten dabei Matrices von $n^r - \binom{n}{r} - \binom{n+r-1}{r}$ Zeilen. Die besondere Einführung der Potenz- und Determinantentransformation ist also entbehrlich. Potenz- und Determinantentransformation treten auch bei der Producttransformation auf.

Ist G irgend eine Gruppe einer endlichen oder unendlichen Anzahl linearer homogener Substitutionen, so ist die zugehörige Gruppe $\Pi_r G$, da alle ihre Substitutionen gleichzeitig durch eine und dieselbe Substitution in die Form (6) *gebracht werden können, reducibel, und $\Pi_r G$ kann so transformirt werden dass als einer der Bestandteile oder eine der Teilgruppen die Gruppe $H_r G$ erscheint.*

Im § 2 leite ich den Satz her, dass, wenn $r = r_1 + r_2 \cdots + r_f$ irgend eine Zerlegung der ganzen positiven Zahl r in ganzzahlige positive Summanden bedeutet, die Gruppe $\Pi_r G$ auch so transformirt werden kann, dass die Gruppe $H_{r_1} G \times H_{r_2} G \times \cdots \times H_{r_f} G$ als ein Bestandteil oder eine Teilgruppe von $\Pi_r G$ erscheint; alle Substitutionen $\Pi_r A$ von $\Pi_r G$ lassen sich nämlich gleichzeitig durch dieselbe Matrix von nicht verschwindender Determinante in die Form:

$$(7) \qquad \begin{matrix} H_{r_1} A \times H_{r_2} A \times \cdots \times H_{r_f} A & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{matrix}$$

bringen.* Aus diesem Satze kann ferner geschlossen werden, das $\Pi_r G$ auch stets einer zerlegbaren oder zerfallenden Gruppe ähnlich ist.

Im § 3 werden die vorstehenden Resultate auf die *Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen* angewandt; hierdurch gelangt man zu *Resolventen einer linearen homogenen Differentialgleichung, die ebenfalls linear und homogen* sind. Die Substitutionen $C_r A$ ergeben Differentialglei-

* Man beachte, dass im allgemeinen $H_r A$ von $H_{r_1} A \times H_{r_2} A \times \cdots \times H_{r_f} A$ verschieden ist; denn beide Substitutionen haben im allgemeinen verschiedene Variablenzahl.

chungen, welche die in Herrn LUDW. SCHLESINGER's *Handbuch* * nach Herrn FORSYTH † sogenannten associerten Differentialgleichungen einer linearen homogenen Differentialgleichung umfassen. Neben diese linearen homogenen Differentialgleichungen treten noch weitere Gattungen linearer homogener Differentialgleichungen, die zu einer vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung gehören und den Operationen $\Pi_r A$ bez. $P_r A$ entsprechen.

§ 1.

Die Substitution $\Pi_r A$, mit der wir uns beschäftigen wollen, lautet nach (3)

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_r k_r} \Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}. \tag{3}$$

Es möge $C_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ die Anzahl der verschiedenen Permutationen der r Zahlen $i_1, i_2, \cdots, i_r$ bedeuten. Sind unter den r Zahlen $i_1, i_2, \cdots i_r$, die sämtlich den n Zahlen $1, 2, \cdots, n$ entstammen, r_1 unter einander gleich einer und derselben Zahl, r_2 gleich einer zweiten Zahl, u. s. w., so ist

$$C_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{r!}{r_1! \, r_2! \ldots}.$$

Wir setzen:

$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\sum\limits'_{i_1 i_2 \ldots i_r} X_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{C_{i_1 i_2 \ldots i_r}}. \tag{8}$$

Die Summe rechts soll alle Summanden umfassen, die erhalten werden, indem man die Zahlen $i_1, i_2, \cdots, i_r$ alle ihre verschiedenen Permutationen annehmen lässt.

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r}' X_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

enthält mithin $C_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ Glieder. Unter einander verschiedene Grössen $Y_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ giebt es soviele, wie n Zahlen zu r, wobei auch die r Elemente mehrfach auftreten, ohne Rücksichtnahme auf die Reihenfolge, verbunden werden können (Combinationen mit Wiederholung), also

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}.$$

Analog zu (8) setzen wir:

$$\Upsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\sum\limits'_{i_1 i_2 \ldots i_r} \Xi_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{C_{i_1 i_2 \ldots i_r}}. \tag{8'}$$

---

* LUDW. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (1897), Leipzig, II_1, 127.

† Royal Society Transactions, vol. 179 (1888), p. 424.

Aus (3) und (8) folgt:

(9)
$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r} \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_r k_r} \Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}}{C_{i_1 i_2 \ldots i_r}}.$$

In (9) hat die Variable $\Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ den Factor:

(10)
$$\frac{\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_r k_r}}{C_{i_1 i_2 \ldots i_r}};$$

dabei ist $i_1, i_2, \cdots, i_r$ durch die Zeile in (9) bestimmt, aus der $\Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ genommen wurde. Bedeutet $k'_1, k'_2, \cdots, k'_r$ eine Permutation der Zahlen $k_1, k_2, \cdots, k_r$, so hat die aus derselben Zeile in (9) wie $\Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ entnommene Variable $\Xi_{k'_1 k'_2 \ldots k'_r}$ den Factor:

(11)
$$\frac{\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 k'_1} \cdot a_{i_2 k'_2} \cdots a_{i_r k_r}}{C_{i_1 i_2 \ldots i_r}}.$$

Die Bezeichnung $\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ ist in (10) und (11) so zu verstehen, dass die r Zahlen $i_1, i_2, \cdots, i_r$ alle ihre $C_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ verschiedenen Permutationen annehmen sollen. Da $k'_1, k'_2, \cdots, k'_r$ nur eine Permutation der Zahlen $k_1, k_2, \cdots, k_r$ vorstellt, so kann der Zähler

$$\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 k'_1} \cdot a_{i_2 k'_2} \cdots a_{i_r k'_r}$$

in (11) so angeordnet werden, dass in jedem Summanden der zweite Index des ersten Factors k_1, des zweiten Factors k_2, u. s. w., des letzten Factors schliesslich k_r lautet. Da sich in (10) und (11) $\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ nur auf $i_1, i_2, \cdots, i_r$ bezieht und alle verschiedenen Permutationen der r Zahlen $i_1, i_2, \cdots, i_r$ zu benützen sind, so ersieht man, dass (10) und (11) gleich sind. In (9) haben daher alle Ξ, die aus einem $\Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ durch Permutation der Indices $k_1, k_2, \cdots, k_r$ hervorgehen und derselben Zeile in (9) angehören, denselben Factor, nämlich:

$$\frac{\sum'_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 k_1} \cdot a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_r k_r}}{C_{i_1 i_2 \ldots i_r}};$$

wir bezeichnen diesen Factor mit

(12)
$$b^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

Bei fest gegebenem $i_1, i_2, \cdots, i_r$ ändert sich $b^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ nicht, wenn die oberen Indices $k_1, k_2, \cdots, k_r$ permutirt werden. Unter Beachtung von (12) wird (9) übergehen in:

(13)
$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} b^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \Xi_{k_1 k_2 \ldots k_r}.$$

Betrachtet man $\Xi_{k_1k_2\ldots k_r}$ und die durch Permutation der $k_1, k_2, \cdots, k_r$ hieraus hervorgehenden Grössen, so bezeichnen wir die Summe aus diesen $C_{k_1k_2\ldots k_r}$ Summanden mit

$$\sum_{k_1k_2\ldots k_r}' \Xi_{k_1k_2\ldots k_r}.$$

Die Factor dieses Aggregats

$$\sum_{k_1k_2\ldots k_r}' \Xi_{k_1k_2\ldots k_r}$$

lautet in (13) wegen der Eigenschaft von $b_{i_1i_2\ldots i_r}^{k_1k_2\ldots k_r}$ sich bei den Permutationen der oberen Indices nicht zu ändern, $b_{i_1i_2\ldots i_r}^{k_1k_2\ldots k_r}$. Daher lässt sich (13) auch schreiben:

$$(14) \qquad Y_{i_1i_2\ldots i_r} = \sum_{k_1k_2\ldots k_r}'' \left[b_{i_1i_2\ldots i_r}^{k_1k_2\ldots k_r}\left(\sum{}' \Xi_{k_1k_2\ldots k_r}\right)\right].$$

$\sum''_{k_1k_2\ldots k_r}$ heisst, man soll in der zu bildenden Summe den $k_1, k_2, \cdots, k_r$ nur $\binom{n+r-1}{r}$ Wertecombinationen beilegen, indem man für $k_1, k_2, \cdots, k_r$ immer r der n Zahlen $1, 2, \cdots, n$ ohne Berücksichtigung der Reihenfolge setzt, dabei können die r Zahlen auch mehrfach auftreten. (Combinationen von n Zahlen zu r mit Wiederholung.) Durch (8′) geht (14) über in

$$(15) \qquad Y_{i_1i_2\ldots i_r} = \sum_{k_1k_2\ldots k_r}'' b_{i_1i_2\ldots i_r}^{k_1k_2\ldots k_r} C_{k_1k_2\ldots k_r} \Upsilon_{k_1k_2\ldots k_r}.$$

Wir behaupten, (15) ist die $r$te Potenztransformation P_rA der Substitution A. Um zur $r$ten Potenztransformation von A zu gelangen, sind in (2) die oberen Indices $1, 2, \cdots, r$ bei x und ξ fortzulassen, es sind *für die rte Potenztransformation* also in (3) $X_{i_1i_2\ldots i_r}$ und $\Xi_{i_1i_2\ldots i_r}$ *unabhängig* von der Reihenfolge der Indices anzunehmen. Bei dieser speciellen Annahme wird nach (8) und (8′):

$$Y_{i_1i_2\ldots i_r} = X_{i_1i_2\ldots i_r}$$

und

$$\Upsilon_{i_1i_2\ldots i_r} = \Xi_{i_1i_2\ldots i_r}.$$

Die Potenztransformation P_rA ergiebt sich daher aus (14), wenn man $Y_{i_1i_2\ldots i_r} = X_{i_1i_2\ldots i_r}$ setzt:

$$(16) \qquad X_{i_1i_2\ldots i_r} = \sum_{k_1k_2\ldots k_r}'' \left[b_{i_1i_2\ldots i_r}^{k_1k_2\ldots k_r}\left(\sum{}' \Xi_{k_1k_2\ldots k_r}\right)\right].$$

Für die Potenztransformation ist $\Xi_{k_1k_2\ldots k_r}$ unabhängig von der Reihenfolge seiner Indices; daher ist

$$\sum_{k_1k_2\ldots k_r}' \Xi_{k_1k_2\ldots k_r}$$

für die Potenztransformation eine Summe von $C_{k_1k_2\ldots k_r}$ gleichen Summanden $\Xi_{k_1k_2\ldots k_r}$.

Formel (16) geht über in:

$$(17) \qquad X_{i_1i_2\ldots i_r} = \sum_{k_1k_2\ldots k_r}'' b_{i_1i_2\ldots i_r}^{k_1k_2\ldots k_r} \cdot C_{k_1k_2\ldots k_r} \Xi_{k_1k_2\ldots k_r}.$$

Formel (17) liefert $P_r A$; bis auf die Variablenbezeichnung ist aber (17) mit der Formel (15) identisch. Hiermit ist der Beweis geleistet.

Wir setzen ferner:

$$T_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \sum_{l_1 l_2 \ldots l_r}''' \epsilon_{l_1 l_2 \ldots l_r} X_{l_1 l_2 \ldots l_r}. \tag{18}$$

Die Summe

$$\sum_{l_1 l_2 \ldots l_r}'''$$

soll alle Summanden umfassen, die man erhält, wenn man die Zahlen $l_1, l_2, \cdots, l_r$ auf jede Art permutirt. Die Zahlen $l_1, l_2, \cdots, l_r$ sollen hierbei r unter einander verschiedene der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ sein und zwar sollen die Ausgangszahlen stets in natürlicher Reihenfolge $l_1 < l_2 < l_3 \cdots < l_r$ gewählt werden, so dass bei $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ die Indices in natürlicher Reihenfolge stehen. $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ hat nur eine Bedeutung für $r \leqq n$; den Fall $r = 1$ schliessen wir auch aus, da wir dann die Substitution A selbst haben würden. Verschiedene Grössen $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ giebt es $\binom{n}{r}$ entsprechend der Anzahl der Combinationen von n Zahlen zu r ohne Wiederholungen. Schliesslich bedeutet $\epsilon_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ die positive Einheit, wenn die Indices $l_1, l_2, \cdots, l_r$ bei dem zugehörigen $X_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ eine gerade Anzahl von Inversionen aufweisen; weisen die Indices $l_1, l_2, \cdots, l_r$ eine ungerade Anzahl von Inversionen auf, so soll $\epsilon_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ die negative Einheit sein.

Genau analog zu (18) führen wir ein:

$$T^*_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \sum_{l_1 l_2 \ldots l_r}''' \epsilon_{l_1 l_2 \ldots l_r} \Xi_{l_1 l_2 \ldots l_r}. \tag{18'}$$

Setzt man in (18) für $X_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ seinen ursprünglichen Wert $x_{l_1}^{(1)} \cdot x_{l_2}^{(2)} \cdots x_{l_r}^{(r)}$, so wird:

$$T_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(1)} & x_{l_2}^{(1)} & \cdots & x_{l_r}^{(1)} \\ x_{l_1}^{(2)} & x_{l_2}^{(2)} & \cdots & x_{l_r}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ x_{l_1}^{(r)} & x_{l_2}^{(r)} & \cdots & x_{l_r}^{(r)} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Wendet man auf die rechte Seite von (18) die Transformation (3) an, so ist dies gleichbedeutend, als ob man in (19) die x durch die ξ transformirt. Thut man dies, so wird aus (19) erhalten:

$$T_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_1 s} \xi_s^{(1)} & \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_2 s} \xi_s^{(1)} & \cdots & \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_r s} \xi_s^{(1)} \\ \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_1 s} \xi_s^{(2)} & \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_2 s} \xi_s^{(2)} & \cdots & \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_r s} \xi_s^{(2)} \\ \vdots & & & \\ \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_1 s} \xi_s^{(r)} & \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_2 s} \xi_s^{(r)} & \cdots & \sum_{s=1}^{s=n} a_{l_r s} \xi_s^{(r)} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Nach einem bekannten Determinantensatz kann Formel (20) auch geschrieben werden:

$$(21)\qquad T_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \sum_{s_1 s_2 \ldots s_r}^{\text{(iv)}} \begin{vmatrix} a_{l_1 s_1} & a_{l_1 s_2} & \cdots & a_{l_1 s_r} \\ a_{l_2 s_1} & a_{l_2 s_2} & \cdots & a_{l_2 s_r} \\ \vdots & & & \\ a_{l_r s_1} & a_{l_r s_2} & \cdots & a_{l_r s_r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_{s_1} & \xi^{(1)}_{s_2} & \cdots & \xi^{(1)}_{s_r} \\ \xi^{(2)}_{s_1} & \xi^{(2)}_{s_2} & \cdots & \xi^{(2)}_{s_r} \\ \vdots & & & \\ \xi^{(r)}_{s_1} & \xi^{(r)}_{s_2} & \cdots & \xi^{(r)}_{s_r} \end{vmatrix}.$$

Die Summe rechter Hand ist über alle Producte zu erstrecken, die erhalten werden, wenn man $s_1, s_2, \cdots, s_r$ auf jede Art unter den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ auswählt. $s_1 < s_2 < s_3 \cdots < s_r$. Beachtet man den Wert von $T^*_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ nach (18′), so wird (21):

$$(22)\qquad T_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \sum_{s_1 s_2 \ldots s_r}^{\text{(iv)}} \begin{vmatrix} a_{l_1 s_1} & a_{l_1 s_2} & \cdots & a_{l_1 s_r} \\ a_{l_2 s_1} & a_{l_2 s_2} & \cdots & a_{l_2 s_r} \\ \vdots & & & \\ a_{l_r s_1} & a_{l_r s_2} & \cdots & a_{l_r s_r} \end{vmatrix} \cdot T^*_{s_1 s_2 \ldots s_r}.$$

Die Transformation (22) ist aber nichts anderes als die $r$te Determinantentransformation $C_r A$ der Substitution A; denn die Grössen $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ sind infolge von (19) (vgl. 4) die Variablen der Substitution $C_r A$.

Die $\binom{n+r-1}{r}$ Variablen $Y_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ und die $\binom{n}{r}$ Variablen $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$, die wir nach (8) und (18) als lineare Combinationen mit constanten Coefficienten aus den n^r Variablen $X_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ einführten, sind linear unabhängig; denn eine jede lineare Relation zwischen diesen Grössen würde sofort eine solche zwischen den linear unabhängigen $X_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ zur Folge haben.

Wir ergänzen die Gleichungen (8) und (18) noch durch Einführung von $n^r - \binom{n}{r} - \binom{n+r-1}{r}$ Variablen U, die beliebige lineare homogene Functionen der n^r Variablen $X_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ mit constanten Coefficienten sind und nur so gewählt seien, dass zwischen $Y_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, $T_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ und den U keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten entsteht; hierdurch erhält man eine Substitution S in n^r Variablen. S führt $\Pi_r A$ in die ähnliche Transformation $S \Pi_r A S^{-1}$ über, so dass die ersten $\binom{n+r-1}{r}$ Variablen sich nach der $r$ten Potenztransformation $P_r A$ und die folgenden $\binom{n}{r}$ Variablen nach $C_r A$ transformiren. Führt man $H_r A$ nach (5) ein, so wird:

$$(\text{vgl. } 6)\qquad S \Pi_r A S^{-1} = \begin{matrix} H_r A & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}.$$

A_{21} und A_{22} bedeuten hierbei Matrices von $n^r - \binom{n+r-1}{r} - \binom{n}{r}$ Zeilen und $\binom{n+r-1}{r} + \binom{n}{r}$ bez. $n^r - \binom{n+r-1}{r} - \binom{n}{r}$ Colonnen.

Für $r > n$ ist $\binom{n}{r} = 0$ und $H_r A = P_r A$.

Die Substitution S hängt nicht von der speciellen Wahl der Substitution A ab; sie ist nur durch r und die Variablenzahl von A bedingt. Durchläuft A die Substitutionen irgend einer Gruppe G linearer homogener Substitutionen, so existirt also eine feste Matrix S von nicht verschwindender Determinante, dass sämtliche Substitutionen der zu $\Pi_r G$ ähnlichen Gruppe $S\Pi_r G S^{-1}$ von der Form (6) werden.

Die Gruppe $S\Pi_r G S^{-1}$, wobei S eine feste Matrix ist, hat die Form:

$$\begin{matrix} H_r G & 0 \\ G_{21} & G_{22}. \end{matrix}$$

Die *Gruppe* $\Pi_r G$ ist also *reducibel* und weist die *für* $1 < r \leqq n$ *zerlegbare Gruppe* $H_r G$ als einen ihrer Bestandtheile auf. Hiermit ist der in der Einleitung p. 65 angeführte Satz völlig bewiesen.

Für $r = 2$ ist $n^r - \binom{n}{r} - \binom{n+r-1}{r} = 0$, daher wird für $r = 2$:

$$S\Pi_2 A S^{-1} = H_2 A = \begin{matrix} P_2 A & 0 \\ 0 & C_2 A \end{matrix}.^*$$

Die Gruppe $\Pi_2 G$ *ist in die zerlegbare Gruppe*

$$\begin{matrix} P_2 G & 0 \\ 0 & C_2' G \end{matrix}$$

transformirbar.

§ 2.

Die positive ganze Zahl r sei auf irgend welche Art in $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_f$, wobei $r_1, r_2, \cdots, r_f$ lauter positive ganze Zahlen bedeuten, zerlegt. Dann ist $\Pi_r A = \Pi_{r_1} A \times \Pi_{r_2} A \times \cdots \times \Pi_{r_f} A$; ist eine der Zahlen r_e $(e = 1, 2, \cdots, f)$ gleich 1, so setzen wir das entsprechende $\Pi_{r_e} A$ einfach gleich A.

Bedeutet e irgend eine der Zahlen $1, 2, \cdots, f$, so giebt es nach den Resultaten des § 1 eine Substitution S_e von nicht verschwindender Determinante, dass:

$$S_e \Pi_r A S_e^{-1} = \begin{pmatrix} H_{r_e} A & 0 \\ A_{21}^{(e)} & A_{22}^{(e)} \end{pmatrix} \qquad (e = 1, 2, \cdots, f) \tag{23}$$

wird; dabei sind $A_{21}^{(e)}$ und $A_{22}^{(e)}$ Matrices von $n^{r_e} - \binom{n+r_e-1}{r_e} - \binom{n}{r_e}$ Zeilen. Nach der mit (I) bezeichneten Eigenschaft der Producttransformation (vgl. S. 61) ist:

$$\begin{aligned} &(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_f)(\Pi_{r_1} A \times \Pi_{r_2} A \times \cdots \times \Pi_{r_f} A) \cdot (S_1^{-1} \times S_2^{-1} \times \cdots \times S_f^{-1}) \\ &\qquad = S_1 \Pi_{r_1} A S_1^{-1} \times S_2 \Pi_{r_2} A S_2^{-1} \times \cdots \times S_f \Pi_{r_f} A S_f^{-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Nach der mit (II) bezeichneten Eigenschaft der Producttransformation ist,

$$S_1^{-1} \times S_2^{-1} \times \cdots \times S_f^{-1} = (S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_f)^{-1},$$

* Dieses Resultat ist auch aus einer Arbeit von IGEL, *Zur Theorie der Determinanten*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 3 (1892), S. 59, zu entnehmen.

mithin wird (24), wenn man noch für:

$$\Pi_{r_1} A \times \Pi_{r_2} A \times \cdots \times \Pi_{r_f} A = \Pi_r A$$

setzt:

$$(25)\quad \begin{aligned}(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_f)\Pi_r A (S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_f)^{-1} \\ = S_1 \Pi_{r_1} A S_1^{-1} \times S_2 \Pi_{r_2} A S_2^{-1} \times \cdots \times S_f \Pi_{r_f} A S_f^{-1}.\end{aligned}$$

Sind A und B irgend welche Matrices der besonderen Form:

$$\begin{matrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix},$$

so sieht man unmittelbar, dass:

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{11} \times B_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

wird; die Matrices L_{21} und L_{22} sind übrigens auch leicht zu bilden. Benützt man diese Bemerkung, so wird vermöge (23) die rechte Seite von (25) gleich der Matrix:

$$(26)\quad \begin{matrix} H_{r_1} A \times H_{r_2} A \times \cdots \times H_{r_f} A & 0 \\ L_{21} & L_{22}. \end{matrix}$$

Die in (25) auftretenden $S_1, S_2, \cdots, S_f$ hängen nur von der Variablenzahl der Substitution A und den positiven Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_f$ ab; sie sind nicht durch die besonderen Werte der Coefficienten des A bedingt, hieraus folgt:

Durchläuft A irgend eine Gruppe G linearer homogener Substitutionen in n Variablen, und bildet man zu jeder Substitution A von G die zugehörige Substitution $\Pi_r A$ von $\Pi_r G$, so sind alle Substitutionen von $\Pi_r G$ durch eine und dieselbe Substitution in die Form (26) überführbar. Die Gruppe $\Pi_r G$ ist also reducibel und weist $H_{r_1} G \times H_{r_2} G \times \cdots \times H_{r_f} G$ als Bestandteil oder Teilgruppe auf; dabei ist der Substitution $\Pi_r A$ von $\Pi_r G$ die Substitution $H_{r_1} A \times H_{r_2} A \times \cdots \times H_{r_f} A$ von $H_{r_1} G \times H_{r_2} G \times \cdots \times H_{r_f} G$ zugeordnet.

Dieser Satz enthält den des § 1 als Specialfall, wie sich ergiebt, wenn man $r_1 = r$ wählt.

Bildet man das Product der zwei zerfallenden Matrices:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

so wird dieses:

$$(27)\quad \begin{bmatrix} A_{11} \times B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} \times B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} \times B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \times B_{22} \end{bmatrix};$$

ferner ist das Product einer zerfallenden Matrix in eine nicht zerfallende:

$$(28)\qquad \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} A_{11} \times B & 0 \\ 0 & A_{22} \times B \end{pmatrix}.$$

Schliesst man $r_1 = r_2 = \cdots r_f = 1$ oder sämtliche Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_f$ gleichzeitig grösser als n aus, so ist $H_{r_1}G \times H_{r_2}G \times \cdots \times H_{r_f}G$ nach (5) ein Product von Gruppen, von denen wenigstens eine zerfällt. Beachtet man (27) und (28), so erhält man das Resultat:

$H_{r_1}G \times H_{r_2}G \times \cdots \times H_{r_f}G$ ist, wenn die zwei Fälle $r_1 = r_2 = \cdots = r_f = 1$ und $r_1 > n$ gleichzeitig $r_2 > n$, $r_3 > n$, $\cdots$, $r_f > n$ ausgeschlossen werden, eine zerfallende Gruppe. In der Diagonale treten bei $H_{r_1}G \times H_{r_2}G \times \cdots \times H_{r_f}G$ nur die Gruppen $K_{r_1}G \times K_{r_2}G \times \cdots \times K_{r_f}G$ auf, wobei für K sowohl P wie C zu wählen sind. K_1G ist einfach G, bei $K_{r_e}G$ ist für $r_e \geqq n+1$ nur $P_{r_e}G$ zu setzen.

Mit Hülfe dieses Satzes beweisen wir, dass $\Pi_r G$ *auch stets einer zerfallenden Gruppe* ähnlich ist. Wählt man nämlich $r_1 = r_2 = \cdots = r_{f-1} = 2$ und $r_f = 1$ oder 2, je nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl ist, so besitzen für diese besondere Wahl der Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_f$ die Substitutionen $\Pi_r A$ und $H_{r_1}A \times H_{r_2}A \times \cdots \times H_{r_f}A$ gleichviel Variablen. $H_2 A$ ist nämlich eine Matrix von

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

Variablen, $H_{r_f}A$ ist für $r_f = 1$ mit A identisch. Für die angegebene Wahl der Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_f$ wird die rechte Seite von (26) einfach $H_{r_1}A \times H_{r_2}A \times \cdots \times H_{r_f}A$, ferner zerfällt $H_{r_1}G \times H_{r_2}G \times \cdots \times H_{r_f}G$ nach dem zuletzt bewiesenen Satze. Wir haben daher das Resultat:

Ist r eine gerade Zahl, so ist $\Pi_r G$ zu der zerfallenden Gruppe $H_2G \times H_2G \times \cdots \times H_2G$ ähnlich; ist r eine ungerade Zahl, so ist $\Pi_r G$ zu der zerfallenden Gruppe $H_2G \times H_2G \times \cdots \times H_2G \times G$ ähnlich. Im ersten Falle entspricht der Substitution $\Pi_r A$ die Substitution $H_2A \times H_2A \times \cdots \times H_2A$, im zweiten Falle die Substitution $H_2A \times H_2A \times \cdots \times H_2A \times A$.

§ 3.

Es sei eine lineare homogene Differentialgleichung:

$$(D)\qquad \frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t)x = 0$$

gegeben; der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)$ rationale Functionen von t sind.

Wir verwenden die folgenden Hülfssätze:

I. Seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen von (D) und $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ rationale Differentialfunctionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (d. h. rationale Functionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und deren Abgeleiteten mit rationalen Coefficienten), die bei jeder linearen homogenen Transformation der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sich ebenfalls linear homogen mit constanten Coefficienten transformiren, so sind, falls zwischen den m Functionen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$, welche Functionen von t sind, keine lineare homogene Relation mit constanten, also von t unabhängigen Coefficienten besteht, die Functionen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ die Elemente eines Fundamentalsystemes einer linearen homogenen Differentialgleichung $m$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten; bestehen zwischen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ $\mu \geqq 1$ lineare homogene, linear unabhängige Relationen mit constanten, also von t unabhängigen Coefficienten, so bilden $m - \mu$ der Functionen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung $m - \mu$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Zwischen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ mögen $\mu \geqq 1$ linear unabhängige, lineare homogene Relationen mit von t unabhängigen, also constanten Coefficienten bestehen. Sie mögen lauten:

$$\begin{aligned}
v_1 &= g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2 + \cdots + g_{1m}\eta_m = 0\\
v_2 &= g_{21}\eta_1 + g_{22}\eta_2 + \cdots + g_{2m}\eta_m = 0,\\
&\vdots\\
v_\mu &= g_{\mu 1}\eta_1 + g_{\mu 2}\eta_2 + \cdots + g_{\mu m}\eta_m = 0.
\end{aligned}$$

Damit die erste Relation eine wirkliche Relation ist, wird in ihr sicher wenigstens eines der η einen von 0 verschiedenen Coefficienten haben. Wir können uns daher, die Functionen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ so bezeichnet denken, dass $g_{1m} \neq 0$ wird. Wir bilden dann:

$$v_2' = g_{2m}v_1 - g_{1m}v_2, \quad v_3' = g_{3m}v_1 - g_{1m}v_3, \cdots, v_\mu' = g_{\mu m}v_1 - g_{1m}v_\mu.$$

Keine der Functionen $v_2', v_3', \cdots, v_\mu'$ enthält η_m, daher werden diese Functionen von der Form:

$$\begin{aligned}
v_2' &= g_{21}'\eta_1 + g_{22}'\eta_2 + \cdots + g_{2m-1}'\eta_{m-1},\\
v_3' &= g_{31}'\eta_1 + g_{32}'\eta_2 + \cdots + g_{3m-1}'\eta_{m-1},\\
&\vdots\\
v_\mu' &= g_{\mu 1}'\eta_1 + g_{\mu 2}'\eta_2 + \cdots + g_{\mu m-1}'\eta_{m-1},
\end{aligned}$$

wobei die g' Constante sind.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \cdots, v_\mu$ können $v_2', v_3', \cdots, v_\mu'$ nicht identisch verschwinden; jede dieser Functionen enthält daher wenigstens ein η mit von Null verschiedenem Coefficienten. Wir denken uns daher die gegebenen Functionen η so bezeichnet, dass der Coefficient g_{2m-1}' von η_{m-1} in v_2'

von Null verschieden ist. $v_2', v_3', \cdots, v_\mu'$ sind linear unabhängig; denn angenommen, es gäbe Constante $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_\mu$, welche nicht sämtlich Null sind, dass: $\sigma_2 v_2' + \sigma_3 v_3' + \cdots + \sigma_\mu v_\mu' = 0$ wird, so würde eine Relation:

$$(\sigma_2 g_{2m} + \sigma_3 g_{3m} + \cdots + \sigma_\mu g_{\mu m}) v_1 - \sigma_2 g_{1m} v_2 - \sigma_3 g_{1m} v_3 \cdots - \sigma_\mu g_{1m} v_\mu = 0$$

folgen. Da $g_{1m} \neq 0$ ist, so würden auch $v_1, v_2, \cdots, v_\mu$ in linearer Dependenz stehen, also $v_1 = 0, v_2 = 0, \cdots, v_\mu = 0$ im Gegensatz zur Voraussetzung nicht μ linear unabhängige Relationen darstellen. Die μ Functionen $v_1, v_2', v_3', \cdots v_\mu'$ sind auch linear unabhängig; denn v_1 enthält η_m, das in $v_2', v_3', \cdots, v_\mu'$ nicht auftritt, ferner sind $v_2', v_3', \cdots, v_\mu'$ linear unabhängig. Leitet man aus $v_2', v_3', \cdots, v_\mu'$:

$$v_3'' = g_{3m-1}' v_2' - g_{2m-1}' v_3', \quad v_4'' = g_{4m-1}' v_2' - g_{2m-1}' v_4', \cdots,$$
$$v_\mu'' = g_{\mu m-1}' v_2' - g_{2m-1}' v_\mu' \, ab,$$

so erhält man von η_{m-1} freie Functionen.

Fährt man auf diese Art fort, so ergiebt sich: Man kann die m Functionen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$, zwischen denen μ linear unabhängige, lineare homogene Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, so angeordnet denken, dass diese Relationen lauten:

$$\begin{aligned}
v_1 &= g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2 + \cdots + g_{1m}\eta_m = 0,\\
v_2' &= g_{21}'\eta_1 + g_{22}'\eta_2 + \cdots + g_{2m-1}'\eta_{m-1} = 0,\\
v_3'' &= g_{31}''\eta_1 + g_{32}''\eta_2 + \cdots + g_{3m-2}''\eta_{m-2} = 0,\\
&\vdots\\
v_\mu^{(\mu-1)} &= g_{\mu 1}^{(\mu-1)}\eta_1 + g_{\mu 2}^{(\mu-1)}\eta_2 + \cdots + g_{\mu\, m-\mu+1}^{(\mu-1)}\eta_{m-\mu+1} = 0.
\end{aligned}$$

Dabei sind die μ Constanten $g_{1m}, g_{2m-1}', g_{3m-2}'', \cdots, g_{\mu\, m-\mu+1}^{(\mu-1)}$ von Null verschieden. Aus diesen Gleichungen kann man daher $\eta_{m-\mu+1}, \eta_{m-\mu+2}, \cdots, \eta_m$ in der Form

$$(c) \qquad \begin{aligned}
\eta_{m-\mu+1} &= c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + \cdots + c_{1m-\mu}\eta_{m-\mu},\\
\eta_{m-\mu+2} &= c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2 + \cdots + c_{2m-\mu}\eta_{m-\mu},\\
&\vdots\\
\eta_m &= c_{\mu 1}\eta_1 + c_{\mu 2}\eta_2 + \cdots + c_{\mu m-\mu}\eta_{m-\mu},
\end{aligned}$$

finden, wobei die c Constante bedeuten; da nur μ Relationen bestehen sollen, so sind $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m-\mu}$ linear unabhängig. Die gegebenen m rationalen Differentialfunctionen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$, zwischen denen μ linear unabhängige Relationen bestehen, seien so angeordnet, dass $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m-\mu}$ linear unabhängig sind und die μ Relationen in Form der Gleichungen (c) gegeben seien. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m-\mu}$ verschwindet die Wronskische Determinante dieser Grössen, die wir mit $\triangle$ bezeichnen, nicht. Wir bilden dann:

$$\begin{vmatrix} \eta & \frac{d\eta}{dt} & \frac{d^2\eta}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta}{dt^{m-\mu}} \\ \eta_1 & \frac{d\eta_1}{dt} & \frac{d^2\eta_1}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta_1}{dt^{m-\mu}} \\ \eta_2 & \frac{d\eta_2}{dt} & \frac{d^2\eta_2}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta_2}{dt^{m-\mu}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{m-\mu} & \frac{d\eta_{m-\mu}}{dt} & \frac{d^2\eta_{m-\mu}}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta_{m-\mu}}{dt^{m-\mu}} \end{vmatrix} : \Delta = 0.$$

Entwickelt man linker Hand nach den Elementen der ersten Zeile der im Zähler stehenden Determinante, so wird man auf die lineare homogene Differentialgleichung:

$$\frac{d^{m-\mu}\eta}{dt^{m-\mu}} - q_1\frac{d^{m-\mu-1}\eta}{dt^{m-\mu-1}} + q_2\frac{d^{m-\mu-2}\eta}{dt^{m-\mu-2}} - \cdots + (-1)^{m-\mu-1}q_{m-\mu-1}\frac{d\eta}{dt}$$
$$+ (-1)^{m-\mu}q_{m-\mu}\eta = 0,$$

$m-\mu$ter Ordnung in η geführt; dabei sind $q_1, q_2, \cdots, q_{m-\mu}$ Determinantenquotienten. Betrachten wir z. B.

$$q_{m-\mu} = \begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{dt} & \frac{d^2\eta_1}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta_1}{dt^{m-\mu}} \\ \frac{d\eta_2}{dt} & \frac{d^2\eta_2}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta_2}{dt^{m-\mu}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d\eta_{m-\mu}}{dt} & \frac{d^2\eta_{m-\mu}}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{m-\mu}\eta_{m-\mu}}{dt^{m-\mu}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \eta_1 & \frac{d\eta_1}{dt} & \cdots & \frac{d^{m-\mu-1}\eta_1}{dt^{m-\mu-1}} \\ \eta_2 & \frac{d\eta_2}{dt} & \cdots & \frac{d^{m-\mu-1}\eta_2}{dt^{m-\mu-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{m-\mu} & \frac{d\eta_{m-\mu}}{dt} & \cdots & \frac{d^{m-\mu-1}\eta_{m-\mu}}{dt^{m-\mu-1}} \end{vmatrix}.$$

Transformirt man $x_1, x_2, \cdots, x_n$ linear homogen mit constanten Coefficienten, so sollen sich nach Voraussetzung auch $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ linear homogen mit constanten Coefficienten transformiren. Möge bei einer linearen homogenen Transformation der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sich η_i in

$$b_{i1}\eta_1 + b_{i2}\eta_2 + \cdots + b_{im}\eta_m \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

transformiren, dann transformiren sich die Abgeleiteten von $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ cogredient mit $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$. Darf man die Relationen (c) benützen, so verhalten sich $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m-\mu}$ auf folgende Art; es geht η_i über in

$$b'_{i1}\eta_1 + b'_{i2}\eta_2 + \cdots + b'_{im-\mu}\eta_{m-\mu} \qquad (i=1, 2, \cdots, m-\mu).$$

Hierbei ist:

$$b'_{ik} = b_{ik} + b_{im}\,c_{\mu k} + b_{im-1}\,c_{\mu-1k} + b_{im-2}\,c_{\mu-2k} + \cdots + b_{im-\mu+1}\,c_{1k}$$
$$(i=1, 2, \cdots m-\mu;\; k=1, 2, \cdots, m-\mu).$$

Da für die Abgeleiteten von $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ auch die Relationen (c) bestehen, so transformiren sich die Abgeleiteten von $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m-\mu}$ auch noch in diesem Falle cogredient zu $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{m-\mu}$.

Bei einer jeden linearen homogenen Transformation der $x_1, x_2, \cdots, x_n$, welche eine solche der $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ nach sich zieht und bei der auch die Relationen (c) verwandt werden dürfen, multiplicirt sich Zähler und Nenner rechter Hand bei $q_{m-\mu}$ mit demselben Factor, nämlich der Determinante $|b'_{ik}|\left(\substack{i=1,2\ldots, m-\mu \\ k=1,2\ldots, m-\mu}\right)$; die rechte Seite von $q_{m-\mu}$ ändert sich also nicht. Untersucht man das Verhalten irgend einer rationalen Differentialfunction des Fundamentalsystemes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bezüglich der Transformationen der Rationalitätsgruppe von (D), so hat man nur zu achten, wie diese rationale Differentialfunction sich als Function der unabhängigen Variablen t bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe verhält. Es handelt sich also bei Anwendung der Picard-Vessiotschen Theorie nie um formale Invarianz. Untersucht man daher die rechte Seite von $q_{m-\mu}$, welche auch eine rationale Differentialfunction von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ist, weil die η nach Annahme rationale Differentialfunctionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sein sollen, so können für die Betrachtung der Änderungen, welche die rechte Seite von $q_{m-\mu}$ durch die Transformationen der Rationalitätsgruppe von (D) erfährt, die Relationen (c) verwandt werden. Benützt man aber die Relationen (c), so ändert sich nach dem Voraufgehenden die rechte Seite von $q_{m-\mu}$ bei keiner linearen homogenen Transformation der x, also auch nicht bei denjenigen der Rationalitätsgruppe von (D) und bleibt daher bei diesen Transformationen dieselbe Function von t; folglich ist nach dem bekannten Picard-Vessiotschen Fundamentalsatz * $q_{m-\mu}$ eine rationale Function von t. Ebenso zeigt man, dass $q_1, q_2, \cdots, q_{m-\mu-1}$ rationale Functionen von t sind.

Sollte zwischen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfinden, so folgt der zu beweisende Satz schon ohne Verwendung der Rationalitätsgruppe aus dem bekannten Satze des Herrn Appell †

* Vgl. Picard, *Traité d'analyse*, t. 3, S. 537, Paris, 1896.

† Vgl. Appell, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires*, Annales de l'école normale supérieure, ser. 2, t. 10 (1881), p. 408; siehe auch E. Beke, *Die symmetrischen Functionen bei den linearen homogenen Differentialgleichungen*, Math. Annalen, Bd. 45 (1894), S. 295. Die Untersuchungen von Herrn Appell setzen lineare Unabhängigkeit von $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ voraus. Bei linearer Abhängigkeit der $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ verschwindet nicht nur die Wronskische Determinante der genannten Functionen, sondern auch jede Determinante:

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(\lambda_1)} & \eta_2^{(\lambda_1)} & \cdots & \eta_m^{(\lambda_1)} \\ \eta_1^{(\lambda_2)} & \eta_2^{(\lambda_2)} & \cdots & \eta_m^{(\lambda_2)} \\ \vdots & & & \\ \eta_1^{(\lambda_m)} & \eta_2^{(\lambda_m)} & \cdots & \eta_m^{(\lambda_m)} \end{vmatrix},$$

wobei $\eta_i^{(\lambda_k)} = d^{\lambda_k}\eta_i/dt^{\lambda_k}$ ist, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ irgend m positive ganze Zahlen bedeuten.

über die invarianten Functionen einer linearen homogenen Differentialgleichung.

(II). Sind $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ m weitere rationale Differentialfunctionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$, die sich bei sämtlichen linearen homogenen Transformationen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ cogredient zu $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ transformiren, und sind $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ nicht in linearer Dependenz, so besteht ein System von Gleichungen:

$$\eta_i = d_0(t)\zeta_i + d_1(t)\frac{d\zeta_i}{dt} + \cdots + d_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}\zeta_i}{dt^{m-1}} \qquad (i=1, 2, \cdots, m),$$

dabei bedeuten $d_0(t)$, $d_1(t)$, $\cdots$, $d_{m-1}(t)$ rationale Functionen von t.

Die lineare homogene Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche die Functionen η zu Integralen hat, ist also mit der linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche die Functionen ζ zu Integralen hat, *von derselben Art.* *

Der eben angegebene Satz (II) ist eine unmittelbare Folge des schon erwähnten Theoremes von Herrn APPELL; denn $d_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ ist als Quotient Δ_k/Δ zweier Determinanten darstellbar; dieser Quotient bleibt bei allen linearen homogenen Transformationen der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ formal ungeändert, da sich $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ und $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ stets cogredient transformiren und Δ_k wie Δ sich daher mit demselben Factor multipliciren. Δ ist als Wronskische Determinante der linear unabhängigen Functionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ von Null verschieden.

Die Anwendung der zwei Hülfssätze liefert die folgenden Theoreme:

Bildet man sich die n^r Functionen:

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r} = \frac{d^{\lambda_1} x_{i_1}}{dt^{\lambda_1}} \cdot \frac{d^{\lambda_2} x_{i_2}}{dt^{\lambda_2}} \cdots \frac{d^{\lambda_r} x_{i_r}}{dt^{\lambda_r}},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ irgend r feste, verschiedene ganze positive Zahlen sind, $i_1, i_2, \cdots, i_r$ jede der Zahlen 1, 2, $\cdots$, n bedeuten, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung (D) $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten sind, so stellen die linear unabhängigen unter den n^r Functionen $X_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung $\leqq n^r$ mit ebenfalls rationalen Coefficienten dar. Diese Differentialgleichung sei mit $\Pi_r^{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r}(D) = 0$ bezeichnet. Betrachtet man die unendliche Anzahl dieser linearen homogenen Differentialgleichungen $\Pi_r^{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r}(D) = 0$, welche zu der linearen homogenen Differentialgleichung $D = 0$ gehören und den verschiedenen möglichen Werten für die unter einander verschiedenen ganzen positiven Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ entsprechen, so ist jede dieser Differential-

---

* Vgl. meine Arbeit, *Über reducible lineare homogene Differentialgleichungen* in den Mathematischen Annalen, Bd. 56 (1903), S. 554.

gleichungen $\Pi_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$ *mit einer jeden unter denselben, deren Ordnung wirklich die Maximalzahl* n^r *erreicht, von derselben Art.*

Bildet man sich in Analogie mit (8) *aus den* n^r *Functionen* $X_{i_1 i_2\ldots i_r}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}$ *die* $\binom{n+r-1}{r}$ *Functionen:*

$$Y_{i_1 i_2\ldots i_r}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}=\frac{\sum'_{i_1 i_2\ldots i_r} X_{i_1 i_2\ldots i_r}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}}{C_{i_1 i_2\ldots i_r}},$$

so stellen die linear unabhängigen derselben ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten der Ordnung $\leqq\binom{n+r-1}{r}$ *dar. Diese Differentialgleichung sei mit* $P_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$ *bezeichnet.*

Jede der unendlich vielen linearen homogenen Differentialgleichungen $P_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$, *die man zu der Differentialgleichung* $D=0$ *bilden kann, ist mit jeder Differentialgleichung* $P_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$, *deren Ordnung wirklich die Maximalzahl* $\binom{n+r-1}{r}$ *besitzt, von derselben Art.*

Bildet man sich in Analogie zu (18) *aus den* n^r *Functionen* $X_{i_1 i_2\ldots i_r}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}$ *die* $\binom{n}{r}$ *Functionen:*

$$T_r^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}=\sum'''_{l_1 l_2\ldots l_r}\epsilon_{l_1 l_2\ldots l_r}X_{l_1 l_2\ldots i_r}^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r},$$

wobei $r\leqq n$ *ist, so stellen die linear unabhängigen unter den* $\binom{n}{r}$ *Functionen ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten der Ordnung* $\leqq\binom{n}{r}$ *dar. Diese Differentialgleichung sei mit* $C_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$ *bezeichnet.*

Die Differentialgleichung $C_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$ ist für den speciellen Fall $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\cdots,\lambda_r=r-1$ in der Litteratur wohl bekannt. Die *Differentialgleichung* $C_r^{0,1,2,\ldots,r-1}(D)=0$ wird von Herrn LUDW. SCHLESINGER im Anschluss an Herrn FORSYTH die $n-$*rte associierte Differentialgleichung von* $D=0$ *genannt.*

Jede der unendlich vielen linearen homogenen Differentialgleichungen $C_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$, *die man zu der Differentialgleichung* $D=0$ *bilden kann, ist mit jeder Differentialgleichung* $C_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$, *deren Ordnung die Maximalzahl* $\binom{n}{r}$ *besitzt, von derselben Art.* *

Die lineare homogene Differentialgleichung $\Pi_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$ *ist stets reducibel; sie wird durch sämtliche Integrale sowohl von* $P_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$ *als auch von* $C_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)=0$, *wenn diese letztere Differentialgleichung existirt, befriedigt.*

Ist λ irgend eine ganze positive Zahl, so sind die linear unabhängigen unter den $\binom{n+r-1}{r}$ Functionen:

$$\frac{d^\lambda x_{i_1}}{dt^\lambda}\cdot\frac{d^\lambda x_{i_2}}{dt^\lambda}\cdots\frac{d^\lambda x_{i_r}}{dt^\lambda},$$

* Den obigen Satz in dem speciellen Falle, dass $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ aus den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ entnommen werden, behandelt Herr LUDW. SCHLESINGER in seinem *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, II_1, S. 127, auf andere Art.

die man erhält, wenn $i_1, i_2, \cdots, i_r$ jede der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeuten, auch ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten der Ordnung $\leqq \binom{n+r-1}{r}$.

Diese Differentialgleichung sei mit $P_r^{\lambda\lambda\cdots\lambda}(D) = 0$ *bezeichnet.*

Jede der linearen homogenen Differentialgleichungen $P_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D)$, *wobei* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ r *verschiedene ganze positive Zahlen sind, und jede der linearen homogenen Differentialgleichungen* $P_r^{\lambda\lambda\cdots\lambda}(D) = 0$ *ist sowohl mit jeder der Differentialgleichungen* $P_r^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}(D) = 0$ *als auch mit jeder der Differentialgleichungen* $P_r^{\lambda\lambda\cdots\lambda}(D) = 0$, *welche die Maximalordnung* $\binom{n+r-1}{r}$ *thatsächlich erreichen, von derselben Art.*

Besonders die Differentialgleichung $P_r^{000\cdots 0}(D) = 0$, welche $\lambda = 0$ entspricht, und $x_1^r, x_2^r, \cdots, x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \cdots, x_n^r$ zu Integralen hat, ist vielfach in der Litteratur * behandelt. †

FREIBURG I. B., *Juni* 1903.

* Vgl. LUDW. SCHLESINGER's, Handbuch, II_1, S. 201; doch ist dort bloss der Nachweis geführt, dass, wenn zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ keine homogene ganze algebraische Beziehung $r$ten Grades mit constanten Coefficienten besteht, $P_r^{00\cdots 0}(D) = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $\binom{n+r-1}{r}$ ist. Ich darf noch bemerken, dass für den einfachsten Fall $r = 2$ ich die obigen Resultate des § 3 bereits in einer Comptes Rendus Note der Pariser Academie vom 30. December 1901 zur Sprache gebracht habe.

† NACHBEMERKUNG (*November* 1903): Das in dem Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 10 (1903), S. 65 erstattete Referat über die vorliegende Arbeit enthält die Worte: "Professor LOEWY shows that the group $\Pi_r G$ is always reducible, $P_r G$ and $C_r G$ being two of its irreducible constituents." Hierdurch werde ich zu folgender Bemerkung veranlasst: Ich habe in der vorstehend erschienenen Arbeit nur gezeigt, dass $P_r G$ und $C_r G$ *Bestandteile oder Teilgruppen* von $\Pi_r G$, *nicht aber irreducible Bestandteile oder irreducible Teilgruppen* von $\Pi_r G$ im Sinne meiner im vierten Bande dieser Transactions erschienenen Arbeit, S. 46 sind. Es ist also im fraglichen Referate das Wort "irreducible" zu streichen. Mehr aber, als dass $P_r G$ und $C_r G$ Bestandteile von $\Pi_r G$ sind, kann man auch nicht beweisen. Es gilt vielmehr folgender Satz, dessen Beweis unschwer erbracht werden kann: *Ist G eine reducible Gruppe, so sind alle Gruppen $P_r G$ und alle Gruppen $C_r G$ die letzteren für $r < n$, wenn G eine Gruppe in n Variablen ist, reducibel.*