CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU SAUT D'UNE FONCTION DONNÉE PAR SON DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE D'HERMITE OU DE LAGUERRE*

PAR
ERVAND KOGBETLIANTZ

INTRODUCTION

Dans l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$ on peut développer une fonction donnée $f(x)$ en série d'Hermite,

$$(1) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n! \pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_n(u) f(u) du \qquad (-\infty < x < \infty),$$

où le $n$ième polynome d'Hermite $H_n(x)$ est défini par

$$e^{-x^2} H_n(x) = \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}.$$

De même, dans l'intervalle $(0, \infty)$ on a pour $\alpha > -1$† la série de Laguerre:

$$(2) \qquad f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) \int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(u) f(u) du,$$

le polynome de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ étant défini par

$$n! x^{\alpha} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}].$$

La série d'Hermite (1) dérivée terme à terme par rapport à x donne une série procédant également suivant les polynomes d'Hermite car

$$H_n'(x) = -2nH_{n-1}(x).$$

Cette nouvelle série

$$(3) \qquad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n! \pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_{n+1}(u) f(u) du$$

n'est autre chose que le développement formel en série d'Hermite de la dérivée $f'(x)$, si $f(x)$ en possède une. En effet, dans l'hypothèse que $f(x)$ et $f'(x)$, sommables (L) dans tout intervalle fini, vérifient à l'infini, pour $|x| \to \infty$,

* Presented to the Society, April 20, 1935; received by the editors September 8, 1933.

† Pour $\alpha \leqq -1$ les polynomes de Laguerre ne forment plus un système orthogonal dans $(0, \infty)$.

la condition d'être $O(e^{qx^2})$ avec $q<1$, on peut faire tendre A vers l'infini dans la relation

$$\int_{-A}^{A} e^{-u^2}f'(u)H_{n-1}(u)du = e^{-A^2}\,|\,f(u)H_{n-1}(u)\,|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} e^{-u^2}H_n(u)f(u)du$$

donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(u)e^{-u^2}H_{n-1}(u)du = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}H_n(u)f(u)du$$

ce qui prouve notre assertion.

La série (3) diverge en tout point $x=x_0$ où $f(x)$ possède une discontinuité caractérisée par un saut *fini*

$$D(x_0) = f(x_0+0) - f(x_0-0),$$

les nombres $f(x_0\pm 0)$ existant par hypothèse. La divergence de la série (3) pour $x=x_0$ est essentielle, c'est à dire sa somme partielle $f_n(x_0)$ tend vers ∞ avec n. Dans ces conditions la série (3) n'est sommable pour $x=x_0$ par aucun procédé de sommation régulier à coefficients positifs.

Néanmoins, $f_n(x_0)$ peut servir pour déterminer à partir de la série divergente (3) le saut $D(x_0)$ de $f(x)$. Ainsi M. Jacob* a prouvé que l'on a

$$D(x_0) = \frac{\pi}{2^{1/2}} \lim_{n=\infty} \frac{f_n(x_0)}{n^{1/2}} \tag{4}$$

sous des conditions très restrictives imposées à $f(x)$; M. Jacob suppose que $f(x)$ est à variation bornée dans $(-\infty, +\infty)$ et qu'elle vérifie en outre la condition d'existence des deux intégrales suivantes:

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-u^2/2}\left|\frac{df(u)}{u}\right| < G \quad \text{et} \quad \int_{a}^{+\infty} e^{-u^2/2}\frac{|\,df(u)\,|}{u} < G. \tag{5}$$

Au §2 nous démontrons que le résultat (4) subsiste sous des conditions beaucoup plus larges, à savoir:

(I) $f(x)$ est sommable (L) dans tout intervalle fini,

(II) le produit $|x^{-1}f(x)|e^{-x^2/2}$ est intégrable à l'infini, c'est à dire les intégrales

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-u^2/2}\,|\,f(u)\,|\,\frac{du}{|\,u\,|} \quad \text{et} \quad \int_{a}^{\infty} e^{-u^2/2}\,|\,f(u)\,|\,\frac{du}{u}$$

existent, et

* Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, vol. 2 (1931), pp. 100–106, 356–368.

(III) l'intégrale définie

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left| f(x_0 + t) - f(x_0 + o \operatorname{sgn} t) \right| \frac{dt}{|t|} < G, \tag{6}$$

où ϵ est aussi petit qu'on veut, mais fixe, existe.

La condition (6) relative à l'allure de $f(x)$ au voisinage immédiat du point $x = x_0$ peut être omise si au lieu des sommes partielles $f_n(x_0)$ de la série (3) on considère leurs moyennes arithmétiques $f_n^{(\delta)}(x_0)$ d'ordre positif δ, définies pour tout $\delta > -1$ ainsi:

$$f_n^{(\delta)}(x_0) = \delta \sum_{m=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{(n+\delta)(n+\delta-1)\cdots(n+\delta-m)} f_m(x_0).$$

On a en effet, le théorème suivant:

Théorème I. *Si* $|f(x)|$ *et* $e^{-u^2/2}|u^{-2\delta-1}f(u)|$ *sont intégrables dans les intervalles* $|x| \leqq a_1$ *et* $a_2 \leqq |u| \leqq \infty$ *respectivement, les nombres positifs* a_1, a_2 *étant aussi grands qu'on veut mais fixes, on a pour tout* $\delta > 0$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(\delta)}(x_0)}{n^{1/2}} = \frac{\Gamma(\delta + 1)}{(2\pi)^{1/2}\Gamma\left(\delta + \frac{3}{2}\right)} D(x_0) \tag{7}$$

et ce résultat subsiste aussi pour $\delta = 0$ *pourvu que* $f(x)$ *vérifie au voisinage du point* $x = x_0$ *la condition* (6), *c'est à dire pourvu que l'expression* $|u^{-1}\{f(x_0+u) - f(x_0+o \operatorname{sgn} u)\}|$ *soit intégrable dans l'intervalle* $(-\epsilon, \epsilon)$, ϵ *étant aussi petit qu'on veut, mais fixe.*

On constate ainsi que, quant à l'allure de $f(x)$ à l'infini, la condition qui assure la possibilité de déduire la valeur $D(x_0)$ de son saut au point de discontinuité $x = x_0$ à partir de sa série d'Hermite dérivée terme à terme est exactement la même que celle qui concerne la sommabilité (C, δ) de la série d'Hermite (1) de $f(x)$.* Cette condition

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2/2} |x|^{-(2\delta+1)} |f(x)| \, dx < G, \\ \int_{a}^{+\infty} e^{-x^2/2} x^{-(2\delta+1)} |f(x)| \, dx < G \end{gathered} \tag{8}$$

devient pour $\delta = 0$

* E. Kogbetliantz, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), vol. 49 (1932), p. 141.

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2/2} | f(x) | \frac{dx}{| x |} < G, \qquad \int_{a}^{+\infty} e^{-x^2/2} | f(x) | \frac{dx}{x} < G.$$

En la comparant à la condition correspondante (5) de M. Jacob on constate que la classe de fonctions $f(x)$ auxquelles est applicable le résultat (4) est élargie considérablement.

La condition (6) est vérifiée si $f(x)$ par exemple est à variation bornée dans l'intervalle $|x-x_0| \leqq \epsilon$. Elle ne concerne que le voisinage immédiat du point $x=x_0$ et est vérifiée en particulier, si l'on a pour $u \to 0$

$$f(x_0 + u) - f(x_0 + o \operatorname{sgn} u) = O\left[\left(\log \frac{1}{| u |}\right)^{-(1+\eta)}\right]$$

quelque petit que soit le nombre positif fixe η. On peut la remplacer (voir §2) par une autre. Posons à cet effet pour $|t| \leqq \epsilon$

$$\psi(t) = t[f(x_0 + t) - f(x_0 + o \operatorname{sgn} t)]$$

et soit

$$\psi(t) = \int_0^t \chi(t)dt.$$

Le résultat (4) *subsiste si l'on remplace la condition* (8) *par la suivante*:

(9) $$\int_0^h | \chi(t) | \, dt = O(h) \qquad \text{pour } h \to 0.$$

Considérons maintenant la série de Laguerre (2). Dérivée terme à terme elle devient

(10) $$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 2)} L_n^{(\alpha+1)}(x) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} L_{n+1}^{(\alpha)}(u) f(u) du$$

car $dL_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)dx$. D'autre part on a

$$n e^{-u} u^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(u) du = d\left\{ e^{-u} u^{\alpha+1} L_{n-1}^{(\alpha+1)}(u) \right\},$$

ce qui permet d'écrire, en supposant l'existence de la dérivée $f'(x)$,

$$-n \int_{\epsilon}^{A} e^{-u} u^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(u) f(u) du = - \left| e^{-u} u^{\alpha+1} L_{n-1}^{(\alpha+1)}(u) f(u) \right|_{\epsilon}^{A}$$
$$+ \int_{\epsilon}^{A} e^{-u} u^{\alpha+1} L_{n-1}^{(\alpha+1)}(u) f'(u) du.$$

Dans les hypothèses $f(u) = O(e^{qu})$, $f'(u) = O(e^{qu})$ pour $u \to \infty$ avec $q < 1$ et $u^{\alpha+1} f(u) = o(1)$ pour $u \to 0$ on en déduit

$$-n\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha L_n^{(\alpha)}(u)f(u)du=\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha+1}L_{n-1}^{(\alpha+1)}(u)f'(u)du,$$

ce qui prouve que (10) n'est autre chose que le développement formel de $f'(x)$ suivant les polynomes de Laguerre $L_n^{(\alpha+1)}(x)$.

Ceci dit, soit $f_n^{(\delta)}(x_0)$ la moyenne arithmétique de sommes partielles de la série (10) considérée au point $x=x_0$ où $f(x)$ admet un saut fini $D(x_0)$. On a pour $x_0>0$ le résultat analogue à celui obtenu pour la série d'Hermite:

THÉORÈME II. *Si* $x^{(\alpha+\delta)/2-1/4}|f(x)|$, $|f(x)|$ *et* $e^{-x/2}x^{\alpha/2-\delta-3/4}|f(x)|$ *sont intégrables dans les intervalles* $(0, \epsilon)$, (ϵ, a) *et* (a, ∞) *respectivement, les nombres positifs* ϵ *et* a^{-1} *étant aussi petits qu'on veut mais fixes, on a pour tout* $\delta>0$

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_n^{(\delta)}(x_0)}{n^{1/2}}=\frac{\Gamma(\delta+1)}{2\pi^{1/2}\Gamma\left(\delta+\dfrac{3}{2}\right)}\cdot\frac{D(x_0)}{x_0^{1/2}}, \tag{11}$$

et ce résultat subsiste aussi pour $\delta=0$, *pourvu qu'au voisinage du point* $x=x_0$, $f(x)$ *vérifie les conditions* (6) *ou* (9).

En étudiant pour $r\to 1$ l'allure des intégrales

$$P_H(r,x)=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}f(u)\left\{\sum_{n=0}^\infty\frac{H_n(x)H_{n+1}(u)}{2^n n!\pi^{1/2}}r^n\right\}du, \tag{12}$$

$$P_L(r,x)=-\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha f(u)\left\{\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(n+2)r^n}{\Gamma(n+\alpha+2)}L_n^{(\alpha+1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(u)\right\}du, \tag{13}$$

obtenues en appliquant aux séries (3) et (10) la méthode de sommation d'Abel-Poisson et en intervertissant les signes $\int$ et $\sum$, on constate que le saut $D(x_0)$ est lié aux limites des produits

$$P_H(r,x)(1-r)^{1/2}\quad\text{et}\quad P_L(r,x)(1-r)^{1/2}$$

par les relations suivantes:

$$D(x_0)=(2\pi)^{1/2}\lim_{r=1}\left\{P_H(r,x)(1-r)^{1/2}\right\}, \tag{14}$$

$$D(x_0)=2(\pi x_0)^{1/2}\lim_{r=1}\left\{P_L(r,x)(1-r)^{1/2}\right\}. \tag{15}$$

Ces formules si simples sont valables sous l'unique hypothèse de l'intégrabilité du produit $e^{-u^2}|f(u)|$ dans $(-\infty, +\infty)$ pour (14) et de celui $e^{-u}|f(u)|$ dans $(0, \infty)$ pour la formule (15), cette dernière exigeant aussi l'intégrabilité du produit $u^\alpha|f(u)|$ dans $(0, \epsilon)$. On constate ainsi qu'au point de vue de l'allure à l'infini la classe des fonctions auxquelles sont applicables les résultats (14) et (15) est beaucoup plus vaste que celle des fonctions dont l'allure à l'infini assure la validité des formules (7) et (11). Néanmoins au point de vue de la détermination effective du nombre $D(x_0)$ la simplicité des formules (14) et (15) n'est qu'apparente. En réalité, étant donné un développement d'Hermite (1) ou un développement de Laguerre (2) dont on se propose d'extraire, en le dérivant d'abord terme à terme, la valeur du saut $D(x_0)$ de la fonction développée en un point déterminé $x=x_0$, on ne peut tenir compte dans les calculs à réaliser avec $r<1$ que d'un nombre *fini* de termes des séries (12) et (13) supposées convergentes et dont les sommes sont désignées par $P_H(r, x_0)$ et $P_L(r, x_0)$. Ce nombre de termes que l'on doit calculer pour connaître une valeur approchée de P_H ou de P_L avec une précision donnée d'avance en fonction de r croît extrêmement vite quand r tend vers l'unité. Or, $D(x_0)$ n'est représenté (aux facteurs numériques près) que par la *limite* du produit $P(r, x_0)\ (1-r)^{1/2}$ pour $r\to 1$. C'est à dire en réalité on a représenté dans (14) et (15) le nombre $D(x_0)$ par deux passages à la limite superposés

$$\lim_{r=1}\left\{(1\ -\ r)^{1/2}\left[\lim_{n=\infty} S_n(r, x_0)\right]\right\}$$

où $S_n(r, x_0)$ désigne la $n$ième somme partielle de la série (12) ou (13). Ceci explique les énormes difficultés de calcul que l'on rencontre dès que l'on essaye de calculer la valeur numérique du saut $D(x_0)$ à l'aide des formules élégantes (14) et (15), difficultés que l'on peut qualifier sans exagération d'insurmontables.

En outre, la liberté beaucoup plus grande que laissent les conditions suffisantes de (14) et (15) à l'allure de la fonction développée à l'infini s'explique par le fait que les résultats (14) et (15) concernent les *intégrales* de Poisson formées dans les systèmes orthogonaux d'Hermite et de Laguerre et dérivées par rapport à x. Si l'on veut parler de la sommation d'Abel-Poisson des *séries* (3) et (10) elles-mêmes on doit tenir compte des résultats obtenus par E. Hille* d'après lesquels les séries obtenues en intervertissant les signes $\int$ et $\sum$ dans les seconds membres de (12) et (13) ne convergent que si l'allure de $f(x)$ à l'infini assure l'intégrabilité à l'infini des produits $e^{-ku^2}|f(u)|$ et $e^{-ku}|f(u)|$ respectivement pour toute valeur de k supérieure à un demi, $k>\frac{1}{2}$.

Notre méthode nous a permis en outre de donner au §1 la démonstration d'un résultat énoncé sans démonstration par E. Hille et qui concerne la sommabilité du développement de Laguerre (2) en un point $x>0$ par le procédé d'Abel-Poisson.

* E. Hille, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 12 (1926), pp. 261–269, Annals of Mathematics, (2), vol. 27 (1926), pp. 427–464, et Mathematische Zeitschrift, vol. 32 (1930), pp. 422–425.

Ce résultat s'énonce ainsi: en tout point x, où existent les deux nombres $f(x\pm 0)$, l'intégrale de Poisson relative à la série (2) tend pour $r\to 1$ vers l'expression $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, pourvu que les produits $u^\alpha|f(u)|$ et $e^{-u}|f(u)|$ soient intégrables dans les intervalles $(0, \epsilon)$ et (ϵ, ∞).

Tous ces résultats (7), (11), (14), et (15) ont été publiés dans une Note* insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

1. Méthode de Poisson

En dérivant par rapport à x les fonctions génératrices des séries noyaux des développements (1) et (2)

$$\sum_0^\infty \frac{H_n(x)H_n(u)}{2^n n!\pi^{1/2}} r^n = \pi^{-1/2}(1-r^2)^{-1/2}\exp\left[-(x^2r^2-2xur+u^2r^2)/(1-r^2)\right],$$

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(u)r^n$$
$$= \frac{(uxr)^{-\alpha/2}}{1-r}\exp\left[-(x+u)r/(1-r)\right] I_\alpha\left(\frac{2(uxr)^{1/2}}{1-r}\right),$$

on trouve celles des séries-noyaux de (12) et de (13), à savoir:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &-\sum_0^\infty \frac{H_n(x)H_{n+1}(u)}{2^n n!\pi^{1/2}} r^n \\ &= \frac{\exp\left[-d^2r/(1-r)+s^2r/(1+r)\right]}{\pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}}\left\{\frac{u-x}{1-r}+\frac{u+x}{1+r}\right\}\end{aligned}$$

où l'on a posé $(x-u)^2=2d^2$ et $(x+u)^2=2s^2$, ainsi que

$$(17)\qquad \begin{aligned} &-\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)L_n^{(\alpha+1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(u)}{\Gamma(n+\alpha+2)} r^n \\ &= \frac{\exp\left[-(x+u)r/(1-r)\right]\left\{I_{\alpha+1}(\tau)u^{1/2}-I_\alpha(\tau)(xr)^{1/2}\right\}}{u^{\alpha/2}(xr)^{(\alpha+1)/2}(1-r)^2}\end{aligned}$$

en posant $\tau=2(uxr)^{1/2}/(1-r)$. La fonction de Bessel $I_\alpha(\tau)$ désigne comme toujours celle

$$i^{-\alpha}J_\alpha(i\tau) = I_\alpha(\tau).$$

Grâce aux relations (16) et (17) on trouve les expressions suivantes:

* E. Kogbetliantz, Comptes Rendus, vol. 196 (1933), pp. 464–466.

$$(18)\qquad \begin{aligned}(1-r)^{1/2}P_H(r,x) &= \frac{2}{(\pi(1+r))^{1/2}}\\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-u^2 - \frac{u^2r^2 - 2uxr + x^2r^2}{1-r^2}\right] f(u)\frac{u-xr}{1-r^2}du,\end{aligned}$$

$$(19)\qquad \begin{aligned}&(1-r)^{1/2}P_L(r,x) = (rx)^{-(\alpha+1)/2}(1-r)^{-3/2}\\ &\times \int_0^{\infty} \exp\left[-u-(u+x)r/(1-r)\right] f(u)\{I_{\alpha+1}(\tau)u^{1/2} - I_\alpha(\tau)(xr)^{1/2}\}du.\end{aligned}$$

Posons pour étudier la limite du second membre de (18) quand r tend vers l'unité

$$\phi_r(u) = \frac{2}{(\pi(1+r))^{1/2}}\frac{u-xr}{1-r^2}\exp\left[-(u^2r^2 - 2xur + x^2r^2)/(1-r^2)\right].$$

En dérivant par rapport à u, on trouve

$$\begin{aligned}(1-r^2)^2 \exp\left[(u^2r^2 - 2xur + x^2r^2)/(1-r^2)\right]&\phi_r'(u)(\pi(1+r))^{1/2}\\ &= -2\{2r^2u^2 - 2rx(1+r^2)u + r^2(2x^2+1) - 1\}.\end{aligned}$$

Les deux racines de l'équation $\phi_r'(u)=0$ sont évidemment

$$(u_1 < u_2)\qquad u_{1,2} = \frac{x(1+r^2) \pm (1-r^2)^{1/2}(2+x^2(1-r^2))^{1/2}}{2r},$$

et l'on a $0<u_1<xr<u_2$, car

$$u_{1,2} - xr = \pm\frac{(1-r^2)^{1/2}}{2r}\{[2+x^2(1-r^2)]^{1/2} \pm x(1-r^2)^{1/2}\}.$$

On constate que $\phi_r'(u)$ est négative dans les intervalles $(-\infty, u_1)$ et $(u_2, +\infty)$.

Les extrema de $\phi_r(u)$ tendent vers l'infini quand r tend vers l'unité. Plus précisément on a pour $r\rightarrow 1$

$$\phi_r(u_{1,2}) = \pm\frac{\exp[x^2 - 1/2]}{2(1-r)^{1/2}} + O(1)$$

tandis que pour ϵ fixe et positif, on peut écrire

$$\phi_r(xr\pm\epsilon) = \pm\,\epsilon\frac{\exp[-\epsilon^2/(1-r^2) + (xr\pm\epsilon)^2]}{1-r^2} = O\left\{\frac{\exp[-\epsilon^2/(1-r^2)]}{1-r^2}\right\}.$$

Par conséquent, vu que $\phi_r'(u)<0$ pour $u<u_1$ et $u>u_2$ et que $\phi_r(u)\gtrless 0$ suivant que $u\gtrless xr$, on trouve

$$| \phi_r(u) | \leqq | \phi_r(xr \pm \epsilon) | = O\left\{ \frac{\exp[-\epsilon^2/(1-r^2)]}{1-r^2} \right\}$$

uniformément en u pourvu que l'on ait $|u-xr| \geqq \epsilon$.

On peut maintenant conclure. Supposons que l'allure à l'infini de la fonction $f(x)$, intégrable (L) dans tout intervalle fini, vérifie la condition d'intégrabilité du produit $e^{-x^2}|f(x)|$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Soit, par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} | f(x) | \, dx < G. \tag{20}$$

En décomposant l'intervalle d'intégration $(-\infty, +\infty)$ en trois: $u \leqq xr-\epsilon$, $|u-xr| \leqq \epsilon$ et $u \geqq xr+\epsilon$, on trouve

$$(1-r)^{1/2} P_H(r \quad x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) \phi_r(u) du = i_1 + i_2 + i_3,$$

où, pour $r \to 1$,

$$\begin{aligned} | i_1 | &\leqq \int_{-\infty}^{xr-\epsilon} | \phi_r(u) | \, e^{-u^2} | f(u) | \, du \\ &= O\left\{ \frac{\exp[-\epsilon^2/(1-r^2)]}{1-r^2} \int_{\infty}^{xr-\epsilon} e^{-u^2} | f(u) | \, du \right\} = o(1). \end{aligned}$$

et de même $i_3 = o(1)$.

Quant à l'intégrale

$$i_2 = \int_{xr-\epsilon}^{xr+\epsilon} \phi_r(u) e^{-u} f(u) du = \int_{xr-\epsilon}^{xr} + \int_{xr}^{xr+\epsilon},$$

transformons la par les substitutions $u = xr \pm t^{1/2}(1-r^2)^{1/2}$ qui donnent

$$\phi_r(u) e^{-u^2} du = \frac{e^{-t} dt}{(\pi(1+r))^{1/2}},$$

en

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{1}{(\pi(1+r))^{1/2}} \left\{ \int_{\epsilon^2/(1-r^2)}^{0} + \int_0^{\epsilon^2/(1-r^2)} \right\} \\ &= \frac{1+o(1)}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\epsilon^2/(1-r^2)} e^{-t} [f(xr + t^{1/2}(1-r^2)^{1/2}) - f(xr - t^{1/2}(1-r^2)^{1/2})] dt. \end{aligned}$$

Or, pour $r \to 1$ et $\epsilon \leqq \epsilon_0(\eta)$, on a quelque petite que soit la quantité fixe η donnée d'avance,

$$\left| f(xr + t^{1/2}(1 - r^2)^{1/2}) - f(xr - t^{1/2}(1 - r^2)^{1/2}) - D(x) \right| < \eta(2\pi)^{1/2}$$

où l'on a posé comme toujours

$$D(x) = f(x + 0) - f(x - 0),$$

l'existence des deux nombres $f(x \pm 0)$ au point x étant assurée par hypothèse. On a donc pour $r \to 1$

$$\left| i_2 - \frac{D(x)}{(2\pi)^{1/2}} (1 - \exp[-\epsilon^2/(1 - r^2)]) \right| < \eta,$$

ce qui achève la preuve de la formule

$$\lim_{r=1} [(2\pi(1 - r))^{1/2} P_H(r, x)] = D(x)$$

valable sous l'unique hypothèse (20) de l'intégrabilité du produit $e^{-x^2}|f(x)|$ dans l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$.

Le même raisonnement s'applique au second membre de (19). On peut l'écrire ainsi:

$$(1 - r)^{1/2} P_L(r, x) = \int_0^\infty \Psi_r(u) e^{-u} f(u) du,$$

en posant pour abréger

$$\Psi_r(u) = (1 - r)^{\alpha - 3/2} (2xr)^{-\alpha - 1} \psi_r(u)$$

et

$$\psi_r(u) = \exp[-(x + u)r/(1 - r)][(1 - r)\tau^{\alpha+1} I_{\alpha+1}(\tau) - 2xr\tau^\alpha I_\alpha(\tau)]$$

où comme toujours $\tau = 2(xur)^{1/2}/(1 - r)$.

Etudions la fonction $\psi_r(u)$ pour x fixe et positif et $u \geqq 1 - r$. Grâce au fait que

$$\frac{d}{dx} [x^\alpha I_\alpha(x)] = x^\alpha I_{\alpha-1}(x)$$

on trouve facilement que la dérivée $\psi_r'(u)$ est le produit d'une fonction, qui reste positive et ne s'annule pas pour $u \geqq 1 - r$ et $r \leqq 1$, par l'expression suivante:

$$\vartheta_r(u) = -uI_{\alpha+1}(\tau) + \frac{1 + r}{r^{1/2}} I_\alpha(\tau)(xu)^{1/2} - xI_{\alpha-1}(\tau).$$

En annulant $\psi_r'(u)$, on trouve l'équation $\vartheta_r(u) = 0$, dont les racines se laissent exprimer par des formules approchées étant donné que pour $u \geqq 1 - r$

et $r \to 1$ la variable τ tend vers l'infini et que l'on peut, par conséquent, utiliser les expressions approchées bien connues

$$(21)\quad I_\alpha(\tau) = \frac{e^\tau}{(2\pi\tau)^{1/2}}\left\{\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha-k+\frac{1}{2})}\frac{(2\tau)^{-k}}{k!}+O(|\tau|^{-m})\right\}.$$

Calculs faits, on constate que dans l'intervalle $(1-r,\ \infty)$ l'équation $\psi_r'(u)=0$ n'a que deux racines réelles u_1 et u_2 situées de part et d'autre du nombre positif x: $1-r<u_1<x<u_2$. Plus précisément, on a

$$u_{1,2}^{1/2} = x^{1/2}\left\{1 \mp \left(\frac{1-r}{2}\right)^{1/2} + \frac{(\alpha-1)(1-r)}{2} + O[(1-r)^{3/2}]\right\},$$

ce qui permet d'écrire

$$u_{1,2} = x[1 \mp (2(1-r))^{1/2} + O(1-r)].$$

Dans l'intervalle $u_1<u<u_2$ la dérivée $\psi_r'(u)$ est positive et elle reste négative quand u varie dans les intervalles $(1-r,\ u_1)$ et $(u_2,\ \infty)$.

Vu que l'expression approchée de $\psi_r(u)$ est égale à

$$\psi_r(u) = \frac{(4rux)^{\alpha/2}x^{1/4}\exp\left[2(uxr)^{1/2}/(1+r^{1/2}) - (u^{1/2}-x^{1/2})^2r/(1-r)\right]}{\pi^{1/2}(ru)^{1/4}(1-r)^{\alpha-1}} \times\left\{\frac{u^{1/2}-x^{1/2}}{(1-r)^{1/2}}+O[(u(1-r))^{1/2}]\right\},$$

on calcule aisément les extrema $\Psi(u_1)$ et $\Psi(u_2)$ de la fonction $\Psi(u)$ dans l'intervalle $(\epsilon,\ \infty)$:

$$\Psi_{1,2} = \Psi(u_{1,2}) = \frac{\mp e^{x-1/2}}{2x(2\pi(1-r))^{1/2}} + O(1) \qquad (r\to 1).$$

On constate que ces extrema tendent vers $-\infty$ et $+\infty$ quand r tend vers l'unité. En outre, il est facile de vérifier à l'aide de (21) que $\psi_r(u)<0$ pour $1-r<u<u_1$. Par conséquent, étant donné que l'expression approchée de $\Psi(u)$ à savoir

$$(22)\quad \Psi_r(u) = \frac{u^{\alpha/2-1/4}\exp\left[(ux)^{1/2} - (u^{1/2}-x^{1/2})^2r/(1-r)\right]}{2x^{\alpha/2+3/4}\pi^{1/2}(1-r)}\{u^{1/2}-x^{1/2} + O[(1-r)u^{1/2}]\}$$

entraîne pour $u^{1/2}=(1\pm\delta)x^{1/2}$, où δ est positive, fixe et aussi petite qu'on veut, celle:

$$\Psi[x(1\pm\delta)^2] = \pm\frac{\delta(1\pm\delta)^{\alpha+1/2}}{2\pi^{1/2}}e^{x(1\pm\delta)}\frac{\exp\left[-rx\delta^2/(1-r)\right]}{1-r}\{1+O(1-r)\},$$

on voit que les résultats acquis permettent d'écrire

(23) $\Psi_r(u) = O\{\exp[-x\delta^2/(1-r)]/(1-r)\}$ $(u \geqq 1-r, |u^{1/2} - x^{1/2}| \geqq \delta x^{1/2})$

et cela uniformément en u dans les intervalles $\epsilon \leqq u \leqq x(1-\delta)^2$ et $x(1+\delta)^2 \leqq u < \infty$, où ϵ et δ sont deux quantités positives aussi petites qu'on veut, choisies d'avance.

Nous pouvons conclure ainsi:

$$(1-r)^{1/2}P_L(r, x) = \int_0^\infty \Psi_r(u)e^{-u}f(u)du$$
$$= \int_0^\epsilon + \int_\epsilon^{x(1-\delta)^2} + \int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} + \int_{x(1+\delta)^2}^\infty = \sum_{k=1}^4 j_k,$$

où d'après (23) on a, quelque petit que soit ϵ,

$$\lim_{r=1} j_2 = \lim_{r=1} j_4 = 0$$

pourvu que l'allure de $f(x)$ à l'infini assure l'existence de l'intégrale définie suivante:

$$\int_\epsilon^\infty e^{-u} | f(u) | du. \tag{24}$$

Considérons maintenant l'intégrale j_1 étendue à l'intervalle $(0, \epsilon)$. Nous allons prouver que l'on a de même $\lim_{r=1} j_1 = 0$, si l'on suppose que le produit $u^\alpha |f(u)|$ est intégrable à l'origine. Soit, en effet,

$$\int_0^\epsilon u^\alpha | f(u) | du < G. \tag{25}$$

Il est facile de prouver que la fonction $\Psi_r(u)$ tend vers zéro (quand $r \to 1$) plus vite qu'une puissance quelconque de $1-r$. On a montré ailleurs* que l'on a, quelque soit $u > 0$,

$$\sigma_n^{(\gamma)} = O\{u^{-(\alpha/2+1/4)} n^{(1+\gamma)/2}\},$$

$\sigma_n^{(\gamma)}$ désignant la $n$ième sigma-somme d'ordre γ de la série-noyau du développement (10):

$$\sigma_n^{(\gamma)} = -\sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(n-m+\gamma+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(\gamma+1)} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+\alpha+2)} L_m^{(\alpha+1)}(x)L_{m+1}^{(\alpha)}(u).$$

Supposons que l'on limite les valeurs de u par l'inégalité $nu \geqq 1$. Dans ces conditions on aura pour $\alpha < -\frac{1}{2}$

* Voir E. Kogbetliantz, Journal of Mathematics and Physics, sous presse, §5, (BL).

$$\sigma_n^{(\gamma)} = O(n^{(1+\gamma)/2}) \qquad (\alpha < -\tfrac{1}{2}, n^{-1} \leqq u \leqq \epsilon)$$

tandis que pour $\alpha \geqq -\frac{1}{2}$,

$$\sigma_n^{(\gamma)} = O(n^{(\gamma+\alpha)/2+3/4}) \qquad (\alpha \geqq -\tfrac{1}{2}).$$

Posons

$$\mu = \max\left[\frac{1+\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma+\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right].$$

On a par conséquent, pour $nu \geqq 1$,

$$\sigma_n^{(\gamma)} = O(n^{\mu}) \qquad \left(u \geqq \frac{1}{n}\right)$$

et cela quelque soit $\alpha > -1$.

Pour $nu \leqq 1$ nous allons utiliser la relation*

$$\sigma_n^{(\gamma)} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(xu)^m}{m!}\left\{\frac{uL_{n-m-1}^{(2m+\alpha+\gamma+3)}(x+u)}{\Gamma(m+\alpha+2)} - \frac{L_{n-m-1}^{(2m+\alpha+\gamma+2)}(x+u)}{\Gamma(m+\alpha+1)}\right\}$$

ainsi que l'inégalité†

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left[e^{x/2}n^{\alpha/2-1/4}x^{-\alpha/2-1/4}\right].$$

Par conséquent, on a l'évaluation suivante, le second terme entre les parenthèses étant en valeur absolue supérieur au premier terme grâce à l'hypothèse $nu \leqq 1$:

$$\sigma_n^{(\gamma)} = O\left\{\sum_0^{n-1} \frac{(xu)^m}{m!} \frac{(n-m)^{m+(\alpha+\gamma)/2+3/4}}{(x+u)^{m+(\alpha+\gamma)/2+5/4}\Gamma(m+\alpha+1)}\right\}$$

$$= O\left\{\left(\frac{n}{x+u}\right)^{(\alpha+\gamma)/2+3/4} \frac{1}{(x+u)^{1/2}} \sum_0^{\infty} \frac{\left(\dfrac{x}{x+u}\right)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\right\}$$

$$= O(n^{(\alpha+\gamma)/2+3/4}),$$

car $x+u \geqq x > 0$. Par conséquent, quelque soient $\alpha > -1$ et $u \geqq 0$ on a

$$\sigma_n^{(\gamma)} = O(n^{\mu}) = O\left[\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu+1)}\right] = O[A_n^{(\mu)}]$$

d'où, en désignant le terme général de la série-noyau du développement (10) par w_n et vu que

* Voir E. Kogbetliantz, Journal of Mathematics and Physics, loc. cit., §5, (F).

† E. Kogbetliantz, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), vol. 49 (1932), p. 149, (27).

$$\Phi(x, u; r) = \sum_0^\infty w_n r^n = (1-r)^{\gamma+1} \sum_0^\infty \sigma_n^{(\gamma)} r^n:$$

$$|\Phi(x, u; r)| = O\left\{(1-r)^{\gamma+1} \sum_0^\infty A_n^{(\mu)} r^n\right\} = O[(1-r)^{\gamma-\mu}].$$

Or,

$$\gamma - \mu = \min\left[\frac{\gamma-1}{2},\ \frac{\gamma-\alpha}{2} - \frac{3}{4}\right] > N$$

car quelque grand que soit le nombre N, on peut toujours choisir γ supérieur au plus grand des deux nombres $2N+1$ et $2N+\alpha+3/2$.

Etant donné que l'on a

$$P_L(r, x) = \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \Phi(u, x; r) f(u) du,$$

on trouve immédiatement le résultat cherché relatif à l'intégrale j_1:

$$|j_1| < (1-r)^{1/2} \int_0^\epsilon e^{-u} u^\alpha |\Phi(u, x; r)| \, |f(u)| \, du$$

$$= O\left\{(1-r)^{N+1/2} \int_0^\epsilon u^\alpha |f(u)| du\right\} = o(1) \qquad (r \to 1)$$

sous l'hypothèse de l'existence de l'intégrale (25).

Il ne nous reste qu'à prouver que la limite de j_3 existe et donne le saut $D(x) = f(x+0) - f(x-0)$ de la fonction $f(x)$. Il est évident que la différence

$$\phi(u) = f(u) - f(x + o \operatorname{sgn}(u - x)) \qquad (u \gtrless x)$$

tend vers zéro quand $u \to x$. Ensuite l'orthogonalité des polynomes de Laguerre entraîne la relation

$$\int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \Phi(u, x; r) du = -\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+2) r^n}{\Gamma(n+\alpha+2)} L_n^{(\alpha+1)}(x) \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha L_{n+1}^{(\alpha)}(u) du = 0$$

et l'on a par conséquent

$$\int_0^\infty \Psi_r(u) e^{-u} du = (1-r)^{1/2} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \Phi(u, x; r) du = 0,$$

ce qui permet de poser

$$\int_x^\infty e^{-u} \Psi_r(u) du = \lambda_r(x) = -\int_0^x e^{-u} \Psi_r(u) du$$

$$= -(1-r)^{1/2} \int_0^x e^{-u} u^\alpha \phi(u, x; r) du.$$

Il nous faut maintenant calculer la fonction $\lambda_r(x)$. On a

$$(n+1)!\int_0^x e^{-u}u^{\alpha}L_{n+1}^{(\alpha)}(u)du = n!e^{-x}x^{\alpha+1}L_n^{(\alpha+1)}(x)$$

car $\alpha > -1$. Par conséquent:

$$\lambda_r(x) = -(1-r)^{1/2}\int_0^x e^{-u}u^{\alpha}\left\{-\sum_0^{\infty}\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+2)}L_n^{(\alpha+1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(u)r^n\right\}du$$
$$= e^{-x}x^{\alpha+1}(1-r)^{1/2}\sum_0^{\infty}\frac{n!r^n}{\Gamma(n+\alpha+2)}\left\{L_n^{(\alpha+1)}(x)\right\}^2$$
$$= \frac{e^{-x}x^{\alpha+1}e^{-2xr/(1-r)}}{(1-r)^{1/2}(xr^{1/2})^{\alpha+1}}I_{\alpha}\left(\frac{2xr^{1/2}}{1-r}\right).$$

La formule (21) donne à ce résultat la forme définitive suivante:

$$\lambda_r(x) = \frac{\exp\left[-(1-r^{1/2})x/(1+r^{1/2})\right]}{2(\pi x)^{1/2}}\left[1+O(1-r)\right],$$

d'où

$$\lim_{r=1}\lambda_r(x) = \frac{1}{2(\pi x)^{1/2}}.$$

Ceci posé, nous avons

$$j_3 - \lambda_r(x)D(x) = \int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} e^{-u}\Psi_r(u)f(u)du$$
$$- f(x+0)\int_x^{\infty} e^{-u}\Psi_r(u)du - f(x-0)\int_0^x e^{-u}\Psi_r(u)du$$
$$= \int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} e^{-u}\phi(u)\Psi_r(u)du - f(x+0)\int_{x(1+\delta)^2}^{\infty} e^{-u}\Psi_r(u)du$$
$$- f(x-0)\int_0^{x(1-\delta)^2} e^{-u}\Psi_r(u)du = \sum_{k=1}^{3} i_k.$$

Vu que la fonction $f(u)\equiv 1$ vérifie les conditions (24) et (25), nous avons immédiatement

$$\lim_{r=1} i_2 = \lim_{r=1} i_3 = 0$$

donc

$$\lim_{r=1}\left\{j_3 - \lambda_r(x)D(x)\right\} = \lim_{r=1}\left\{j_3 - \frac{D(x)}{2(\pi x)^{1/2}}\right\} = \lim_{r=1} i_1$$

où

$$i_1 = \int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} e^{-u}\phi(u)\Psi_r(u)du$$

avec $\phi(u) = f(u) - f[x + o \operatorname{sgn}(u-x)] \to 0$ pour $u \to x$. Par conséquent, en choisissant δ suffisamment petit on peut rendre la borne supérieure de $|\phi(u)|$ dans l'intervalle $[x(1-\delta)^2, x(1+\delta)^2]$ aussi petite qu'on veut et cela prouve que l'intégrale i_1 est aussi petite qu'on veut en valeur absolue si l'on a

$$\int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} |\Psi_r(u)|\, du = O(1).$$

Or, la formule approchée (22) prouve que pour x fixe et u compris dans l'intervalle $[x(1-\delta)^2, x(1+\delta)^2]$, on a

$$\Psi_r(u) = O\left\{\exp\left[-(u^{1/2} - x^{1/2})^2/(1-r)\right]\left[1 + \frac{|u^{1/2} - x^{1/2}|}{1-r}\right]\right\},$$

ce qui permet de conclure ainsi: posons $t = u^{1/2} - x^{1/2}$; alors

$$\int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} |\Psi_r(u)|\, du = O\left\{\int_0^{\delta x^{1/2}} \exp\left[-t^2/(1-r)\right]\left(1 + \frac{t}{1-r}\right)dt\right\} = O(1).$$

On a démontré ainsi que

$$\lim_{r=1} i_1 = 0,$$

et par conséquent

$$\lim_{r=1}\left\{(1-r)^{1/2}P_L(u, x; r)\right\} = \lim_{r=1} j_3 = \frac{D(x)}{2(\pi x)^{1/2}}.$$

Il est intéressant d'observer que la même méthode nous fournit une preuve facile du résultat énoncé par Einar Hille,* relatif à la sommabilité

---

* E. Hille, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 12 (1926), pp. 261, 265, 348. S. Wigert, Arkiv för Matematik, vol. 15 (1921), No. 25, a donnée une démonstration pour le cas $\alpha = 0$ en supposant que $f(x)$ soit continue et satisfasse à une condition semblable à (24) avec e^{-u} remplacée par e^{-au} pour tout $a > \frac{1}{2}$. Hille remarque que le procédé de Wigert s'étend au cas général et il donne les formules nécessaires pour cette extension. Le noyau $F_r(u, x)$ se trouve aussi dans une note de G. H. Hardy, Journal of the London Mathematical Society, vol. 7 (1932), pp. 138, 192.

Il faut encore remarquer qu'il s'agit d'une généralisation du procédé d'Abel-Poisson dans (26). En effet, l'hypothèse (24) n'assure l'analyticité de l'intégrale de Poisson que dans le cercle $|r - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la série d'Abel-Laguerre, obtenue en appliquant à la série (2) la méthode de sommation d'Abel-Poisson, ne peut être convergente pour aucune valeur de $r \neq 0$. Quand on remplace dans (24) e^{-u} par e^{-au}, l'analyticité est assurée dans $|r - 1 + 1/(2a)| < 1/(2a)$, et, si $a < 1$, la somme de la série est donnée par l'intégrale de Poisson pour $|r| < \min(1, 1/a - 1)$. C'est donc seulement pour $a \leqq \frac{1}{2}$ qu'on peut parler de la sommabilité Abel-Poisson au sens ordinaire. Pour la situation correspondante dans la théorie de la série d'Hermite voir les travaux de Hille dans Annals of Mathematics, (2), vol. 27 (1926), p. 427, et Mathematische Zeitschrift, vol. 32 (1930), p. 422.

du développement de Laguerre (2) en un point $x>0$ par le procédé d'Abel-Poisson et dont la démonstration, semble-t-il, n'a pas été publiée par l'auteur. Il s'agit de prouver que l'on a

$$\lim_{r=1}\int_0^\infty e^{-u}F_r(u,\,x)f(u)du = \tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] \tag{26}$$

où

$$\begin{aligned} F_r(u,\,x) &= \frac{u^{\alpha/2}\exp\left[-(x+u)r/(1-r)\right]}{(1-r)(xr)^{\alpha/2}}I_\alpha\left(\frac{2(uxr)^{1/2}}{1-r}\right) \\ &= \left(\frac{1-r}{2xr}\right)^\alpha \frac{\exp\left[-(x+u)r/(1-r)\right]}{1-r}\tau^\alpha I_\alpha(\tau). \end{aligned}$$

Or, on trouve pour la dérivée de $F_r(u,\,x)$ par rapport à u l'expression suivante:

$$\frac{d}{du}F_r(u,\,x) = \frac{F_r(u,\,x)}{1-r}\left\{I_{\alpha-1}(\tau)x^{1/2} - I_\alpha(\tau)(ru)^{1/2}\right\}\left(\frac{r}{u}\right)^{1/2}$$

d'où pour $u \geqq \epsilon$ la conclusion suivante: dans l'intervalle infini $(\epsilon,\,\infty)$ la fonction $F_r(u,\,x)$ est positive et ne possède qu'un seul maximum, dont l'abscisse est $u=u_0=x+(2x+2\alpha-1)(1-r)+O[(1-r)^2]$.

Ce maximum $F_r(u_0,\,x)$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers l'unité, mais on a

$$F_r[x(1\pm\delta)^2,\,x] = O\left\{\frac{\exp\left[-xr\delta^2/(1-r)\right]}{(x(1-r))^{1/2}}\right\},$$

d'où immédiatement

$$\lim_{r=1}\int_\epsilon^{x(1-\delta)^2} e^{-u}F_r(u,\,x)f(u)du = \lim_{r=1}\int_{x(1+\delta)^2}^\infty e^{-u}F_r(u,\,x)f(u)du = 0$$

sous l'unique hypothèse (24). De même l'hypothèse (25) assure

$$\lim_{r=1}\int_0^\epsilon e^{-u}F_r(u,\,x)f(u)du = 0,$$

car pour $0\leqq u\leqq\epsilon$ on a $u^{-\alpha}F_r(u,\,x)e^{-u}=O[(1-r)^N]$, le nombre fixe N étant aussi grand qu'on veut. Enfin, quant à l'intégrale

$$\int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)} e^{-u}F_r(u,\,x)f(u)du,$$

la formule approchée

$$e^{-u}F_r(u,\,x) = \frac{u^{\alpha/2-1/4}\exp\left[-(u^{1/2}-x^{1/2})^2/(1-r)\right]}{2(xr)^{\alpha/2+1/4}(\pi(1-r))^{1/2}}\left\{1+O\left(\frac{1-r}{u^{1/2}}\right)\right\}$$

prouve que l'intégrale du produit $e^{-u}|F_r(u, x)|$ est bornée:

$$\begin{aligned}\int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2} & e^{-u}\,|F_r(u, x)|\,du \\ &= \frac{1+\eta}{2\pi^{1/2}}\int_{x(1-\delta)^2}^{x(1+\delta)^2}\exp\left[-(u^{1/2}-x^{1/2})^2/(1-r)\right]\frac{du}{(u(1-r))^{1/2}} \\ &= \frac{2(1+\eta)}{\pi^{1/2}}\int_0^{\delta(x/(1-r))^{1/2}} e^{-\xi^2}d\xi = O(1) \qquad (r\to 1)\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (26).

2. Sommation (C, δ) de la série (3)

Pour démontrer la relation

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_n^{(\delta)}(x_0)}{n^{1/2}} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{(2\pi)^{1/2}\Gamma\left(\delta+\dfrac{3}{2}\right)}\,D(x_0), \tag{7}$$

où $f_n^{(\delta)}(x_0)$ désigne la $n$ième moyenne arithmétique d'ordre δ de la série divergente

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{2^n n!\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}H_{n+1}(u)f(u)du, \tag{3}$$

observons que l'on a

$$f_n^{(\delta)}(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x_0)f(u)du, \tag{27}$$

$S_n^{(\delta)}(u, x)$ désignant la moyenne arithmétique d'ordre δ de la série-noyau de (3), c'est à dire de la série

$$-\sum_{0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_{n+1}(u)}{2^n n!\pi^{1/2}} \sim 0 \qquad (u \neq x). \tag{28}$$

Cette moyenne $S_n^{(\delta)}(u, x)$ vérifie* les deux inégalités suivantes:

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O\left\{\frac{e^{(x^2+u^2)/2}n^{(1-\delta)/2}}{|u-x|^{\delta+1}}\right\} \qquad (0 \leqq u < \infty;\ \delta \geqq 0;\ |x| \leqq a), \tag{29}$$

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O\left\{\frac{e^{u^2/2}n^{1/2}}{|u|^{2\delta+1}}\right\} \qquad (|u| \geqq en^{1/2};\ \delta \geqq 0,\ |x| \leqq a), \tag{30}$$

* Voir E. Kogbetliantz, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), vol. 49 (1932), p. 172, (62), p. 173, (65).

ainsi que celle:

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O(ne^{(x^2+u^2)/2}) \tag{31}$$

valable quels que soient u et x et dont la preuve qui suit est basée sur l'inégalité

$$H_n(x) = O[n^{-1/4}e^{x^2/2}(2^n n!)^{1/2}].$$

En effet, en posant

$$n!A_n^{(\delta)}\Gamma(\delta + 1) = \Gamma(n + \delta + 1)$$

on a

$$\begin{aligned} S_n^{(\delta)}(u, x) &= \frac{-1}{A_n^{(\delta)}} \sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)} \frac{H_m(x)H_{m+1}(u)}{2^m m!\pi^{1/2}} \\ &= O\left[n^{-\delta} e^{(x^2+u^2)/2} \sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)}\right] = O(ne^{(x^2+u^2)/2}). \end{aligned}$$

Ceci posé, soit d'abord $\delta > 0$, le cas $\delta = 0$ étant écarté pour le moment. On peut écrire d'après (27)

$$\begin{aligned} \frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} &= \frac{1}{n^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{n^{1/2}}\int_{-\infty}^{-A} + \frac{1}{n^{1/2}}\int_{-A}^{x-\epsilon} \\ &+ \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} + \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x+\epsilon}^{A} + \frac{1}{n^{1/2}}\int_{A}^{\infty} = \sum_{k=1}^{5} J_k, \end{aligned} \tag{32}$$

la fonction sous les signes somme étant

$$e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)f(u)du.$$

Les inégalités (29) et (30) entraînent:

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \frac{1}{n^{1/2}}\int_{-\infty}^{-\epsilon n^{1/2}} + \frac{1}{n^{1/2}}\int_{-\epsilon n^{1/2}}^{-A} e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)f(u)du \right| \\ &= O\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon n^{1/2}} e^{-u^2/2}|f(u)| \frac{du}{|u|^{2\delta+1}}\right] \\ &\quad + O\left[\int_{-\epsilon n^{1/2}}^{-A} e^{-u^2/2}|f(u)| \frac{du}{n^{\delta/2}|u|^{\delta+1}}\right] \\ &= O\left[\int_{-\infty}^{-A} e^{-u^2/2}|f(u)| \frac{du}{|u|^{2\delta+1}}\right] < \eta \end{aligned}$$

quelque petite que soit la quantité positive η choisie d'avance, pourvu que le produit $e^{-u^2/2}|f(u)|\,|u|^{-(2\delta+1)}$ soit intégrable à l'infini, le nombre fixe A étant suffisamment grand: $A \geqq A_0 = A_0(\eta)$. On trouve également $|J_5| < \eta$, ces deux résultats relatifs à J_1 et J_5 étant rendus possibles par l'hypothèse de l'existence des deux intégrales définies que voici:

$$(33) \qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-u^2/2}|f(u)|\frac{du}{|u|^{2\delta+1}} < G, \qquad \int_{a}^{\infty} e^{-u^2/2}|f(u)|\frac{du}{u^{2\delta+1}} < G.$$

Ensuite l'inégalité (29) nous donne

$$\begin{aligned} |J_4| &\leqq \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x+\epsilon}^{A} e^{-u^2}|S_n^{(\delta)}(u, x)|\,|f(u)|\,du \\ &= O\left\{\frac{1}{\epsilon^{\delta+1}n^{\delta/2}}\int_{x+\epsilon}^{A}|f(u)|\,du\right\} = O(n^{-\delta/2}), \end{aligned}$$

la fonction $f(u)$ étant par hypothèse sommable (L) dans tout intervalle fini. De même pour J_2 et par conséquent on a, si $\delta > 0$,

$$\lim_{n=\infty} J_2 = \lim_{n=\infty} J_4 = 0.$$

On constate ainsi que pour $\delta > 0$ la différence

$$\frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} - \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)f(u)du$$

peut être rendue aussi petite qu'on veut en valeur absolue en choisissant d'abord A ensuite n suffisamment grands, ce qui veut dire que l'on a pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} = \lim_{n=\infty} J_3 = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)f(u)du.$$

Posons, pour $u = x$, $\phi(u) = 0$, et pour $u \neq x$,

$$\phi(u) = f(u) - f(x + o \operatorname{sgn}(u - x))$$

et soit $\theta(\epsilon)$ la borne supérieure de $|\phi(u)|$ dans l'intervalle $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. On a évidemment

$$\lim_{\epsilon=0} \theta(\epsilon) = 0.$$

On peut écrire

$$(34) \qquad \begin{aligned} J_3 = {} & \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)\phi(u)du + \frac{f(x+0)}{n^{1/2}}\int_{x}^{\infty} e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)du \\ & + \frac{f(x-0)}{n^{1/2}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u, x)du - J_6 \end{aligned}$$

où

$$J_6 = \frac{f(x+0)}{n^{1/2}} \int_{x+\epsilon}^{\infty} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(u, x) du + \frac{f(x-0)}{n^{1/2}} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(u, x) du.$$

L'inégalité (29) nous donne pour $\delta > 0$

$$J_6 = O\left\{ \frac{|f(x+0)|}{n^{\delta/2}} \int_{x+\epsilon}^{\infty} e^{-u^2/2} \frac{du}{(u-x)^{\delta+1}} + \frac{|f(x-0)|}{n^{\delta/2}} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} e^{-u^2/2} \frac{du}{(x-u)^{\delta+1}} \right\}$$

c'est à dire $J_6 = O(n^{-\delta/2})$, ce qui prouve que l'on a

$$\lim_{n=\infty} J_6 = 0.$$

Ensuite

$$\left| \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \phi(u) e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(u, x) du \right| \leqq \frac{\theta(\epsilon)}{n^{1/2}} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} | S_n^{(\delta)}(u, x) | du.$$

Soit

$$i_n = \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} | S_n^{(\delta)}(u, x) | du$$

$$= \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x-\epsilon}^{x-n^{-1/2}} + \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x-n^{-1/2}}^{x+n^{-1/2}} + \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x+n^{-1/2}}^{x+\epsilon} = \sum_{k=1}^{3} i_{nk}.$$

On peut appliquer aux intégrales i_{n1} et i_{n3} l'inégalité (29) tandis que i_{n2} exige l'application de l'inégalité (31):

$$i_{n2} = O\left[n^{1/2} \int_{x-n^{-1/2}}^{x+n^{-1/2}} du \right] = O(1),$$

et de même $i_{n1} = O(1)$, $i_{n3} = O(1)$, car par exemple

$$i_{n1} = \frac{1}{n^{1/2}} O\left[n^{(1-\delta)/2} \int_{n^{-1/2}}^{\infty} \frac{du}{u^{\delta+1}} \right] = O(1).$$

Par conséquent, on a établi que $i_n = O(1)$, d'où

$$\frac{1}{n^{1/2}} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} e^{-u^2} \phi(u) S_n^{(\delta)}(u, x) du = O[i_n \theta(\epsilon)] = O[\theta(\epsilon)] \leqq \eta$$

pourvu que ϵ soit assez petit: $\epsilon \leqq \epsilon_0 = \epsilon_0(\eta)$.

Observons encore que grâce à l'orthogonalité des polynomes d'Hermite on obtient

$$A_n^{(\delta)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u,x)du = -\sum_0^n \frac{A_{n-m}^{(\delta)}H_m(x)}{2^m m!\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}H_{m+1}(u)du = 0,$$

ce qui permet de poser pour $\delta\geqq 0$

$$j_n^{(\delta)}(x) = \int_x^{\infty}e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u,x)du = -\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2}S_n^{(\delta)}(u,x)du.$$

Les remarques faites conduisent à la conclusion suivante:

$$\lim_{n=\infty} I_3 = [f(x+0)-f(x-0)]\lim_{n=\infty}\frac{j_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}}\cdot$$

Pour calculer la limite figurant au second membre il suffit d'utiliser la définition même du polynome d'Hermite:

$$-\int_x^{\infty}e^{-u^2}H_{m+1}(u)du = -\left|\frac{d^m e^{-u^2}}{dx^m}\right|_x^{\infty} = e^{-x^2}H_m(x),$$

et par conséquent

$$j_n^{(\delta)}(x) = \frac{e^{-x^2}}{A_n^{(\delta)}}\sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)}\frac{H_m^2(x)}{2^m m!\pi^{1/2}} = \frac{e^{-x^2}\sigma_n^{(\delta)}(x,x)}{A_n^{(\delta)}}$$

où $\sigma_n^{(\delta)}(u,x)$ désigne la $n$ième sigma-somme d'ordre δ de la série-noyau de développement (1). Or, on a

$$\sum_0^{\infty}\frac{H_m(x)H_m(u)}{2^m m!\pi^{1/2}}z^m = \frac{\exp[-(u^2z^2-2uxz+x^2z^2)/(1-z^2)]}{\pi^{1/2}(1-z^2)^{1/2}}$$

d'où

$$\pi^{1/2}\sum_0^{\infty}\sigma_n^{(\delta)}(x,x)z^n = \frac{\exp[2x^2z/(1+z)]}{(1-z)^{\delta+3/2}(1+z)^{1/2}}\cdot$$

Vu que l'allure du second membre pour $z\to 1$ est celle de la fonction $(2\pi)^{-1/2}(1-z)^{-\delta-3/2}e^{x^2}$ tandis que pour $z\to -1$ cette allure est celle de la fonction $\pi^{-1/2}2^{-\delta-3/2}(1+z)^{-1/2}\exp[2x^2z/(1+z)]$ on peut obtenir l'expression approchée de $\sigma_n^{(\delta)}(x,x)$ en développant suivant les puissances de z la fonction auxiliaire:

$$\frac{1}{(1-z)^{\delta+3/2}}\{\phi(1)-(1-z)\phi'(1)+\cdots\}$$
$$+\frac{\exp[2x^2z/(1+z)]}{(1+z)^{1/2}}\{\psi(-1)+(1+z)\psi'(-1)+\cdots\},$$

où l'on a posé

$$\phi(z)\pi^{1/2} = \frac{\exp\left[2x^2z/(1+z)\right]}{(1+z)^{1/2}},$$

$$\psi(z)\pi^{1/2} = \frac{1}{(1-z)^{\delta+3/2}}.$$

On trouve ainsi la formule approchée, valable pour $\delta > -1$:

$$A_n^{(\delta)} j_n^{(\delta)}(x)\pi^{1/2} = e^{-x^2}\sigma_n^{(\delta)}(x, x)\pi^{1/2} = e^{-x^2}\pi^{1/2}\{A_n^{(\delta+1/2)}\phi(1) - A_n^{(\delta-1/2)}\phi'(1)$$
$$+ \cdots + (-1)^n L_n^{(-1/2)}(2x^2)\psi(-1) + \cdots\}.$$

L'erreur étant inférieure en valeur absolue au premier terme rejeté, on en déduit pour $\delta \geqq 0$ et grâce à l'inégalité vérifiée par le polynome de Laguerre

$$j_n^{(\delta)}(x)\ \frac{A_n^{(\delta+1/2)}}{A_n^{(\delta)}(2\pi)^{1/2}}\left\{1 + O\left(\frac{x^2}{n}\right) + O(n^{-3/4})\right\},$$

d'où enfin

$$\lim_{n=\infty} \frac{j_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\left(\delta+\dfrac{3}{2}\right)(2\pi)^{1/2}} \qquad (\delta \geqq 0),$$

et cela achève la preuve de la relation (7) pour $\delta > 0$.

Pour donner un exemple considérons la série d'Hermite de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-a)$* qui fait le saut $D(a) = 1$, étant égale à ± 1 suivant que $x \gtrless a$:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-a) = -\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^a e^{-u^2}du - \frac{e^{-a^2}}{\pi^{1/2}}\sum_0^\infty \frac{H_n(a)H_{n+1}(x)}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Dérivée terme à terme par rapport à x elle nous donne la série-noyau du développement (1) et en désignant la somme partielle de cette série-noyau par $\sigma_n^{(0)}(u, x)$, on obtient pour $x = a$ l'expression

$$f_n^{(0)}(a) = e^{-a^2}\sigma_n^{(0)}(a, a) = e^{-a^2}\sum_0^n \frac{H_m^2(a)}{2^m m!\pi^{1/2}}.$$

La formule approchée pour $e^{-x^2}\sigma_n^{(\delta)}(x, x)$, que nous venons d'écrire, devient pour $\delta = 0$, $x = a$,

* E. Kogbetliantz, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, vol. 49 (1932), p. 197, (81).

$$A_n^{(1/2)}\phi(1) - A_n^{(-1/2)}\phi'(1) + \cdots + (-1)^n L_n^{(-1/2)}(2a^2)\psi(1) + \cdots$$

d'où, vu que $e^{-a^2}\phi(1)(2\pi)^{1/2}=1$,

$$f_n^{(0)}(a) = \frac{A_n^{(1/2)}}{(2\pi)^{1/2}}\left[1 + O\left(\frac{a^2}{n}\right) + O\left(n^{-3/4}\right)\right]$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(0)}(a)}{n^{1/2}} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(1/2)}}{n^{1/2}} = \frac{2^{1/2}}{\pi}. \tag{35}$$

Appliquons la relation (7) avec $\delta=0$. On trouve:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(0)}(a)}{n^{1/2}} = \frac{\Gamma(1)D(a)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(2\pi)^{1/2}} = \frac{2^{1/2}}{\pi} D(a) \tag{36}$$

et l'on voit en comparant la relation particulière (35) à celle générale (36), qu'on a déterminé bien exactement $D(a)=1$ dans le cas $\delta=0$ pour la fonction

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-a).$$

Nous allons maintenant étudier le cas général, où $\delta=0$. On a, en décomposant $f_n^{(0)}(x)$ d'après (32) en cinq intégrales I_k, $k=1, 2, 3, 4, 5$, le même résultat que pour $\delta>0$ en ce qui concerne les intégrales I_1 et I_5 pourvu que le produit $|u|^{-1}e^{-u^2/2}|f(u)|$ soit intégrable dans les intervalles $a \leqq |u| \leqq \infty$. De même on va voir que I_2 et I_4 tendent vers zéro quand $n\to\infty$ aussi pour $\delta=0$, si $f(x)$ est sommable (L) dans tout intervalle fini. Seulement dans ce cas, $\delta=0$, nous devons utiliser la formule approchée:

$$S_n^{(0)}(u, x) = -\frac{e^{(x^2+u^2)/2}n^{1/2}}{(u-x)\pi}\left\{\cos\left[(u-x)(2n)^{1/2}\right] + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right\} \tag{37}$$

valable pour toutes les valeurs finies de u et de x.

Cette formule est facile à déduire de l'expression approchée:

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{e^{(x^2+u^2)/2}}{\pi^{1/2}}\left\{\frac{n^{\alpha-3/4}}{d^{2\alpha-1/2}}\left[4^{-\beta}\cos\left(2dn^{1/2} - (\alpha - \tfrac{1}{4})\pi\right) + O(n^{-1/2})\right]\right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{n^{\beta-3/4}}{s^{2\beta-1/2}}\left[4^{-\alpha}\cos\left(2sn^{1/2} - (\beta - \tfrac{1}{4})\pi\right) + O(n^{-1/2})\right]\right\}$$

démontrée ailleurs* pour le coefficient $g_n=g_n(\alpha, \beta)$ du développement

* E. Kogbetliantz, Journal of Mathematics and Physics, loc. cit., §3, (G).

$$G_\beta^{(\alpha)}(z) = (1-z)^{-2\alpha}(1+z)^{-2\beta} \exp\left[-d^2z/(1-z)+s^2z/(1+z)\right] = \sum_0^\infty g_n z^n.$$

En effet, on a, en comparant la fonction génératrice de la suite $S_n^{(0)}(u, x)$

$$\sum_0^\infty z^n S_n^{(0)}(u, x) = \frac{2(u-xz)\exp\left[-d^2z/(1-z)+s^2z/(1+z)\right]}{(1-z)^{5/2}(1+z)^{3/2}\pi^{1/2}}$$

où $2^{1/2}d = |u-x|$, $2^{1/2}s = u+x$, à la fonction $G_\beta^{(\alpha)}(z)$, on trouve

$$\pi^{1/2}\sum_0^\infty z^n S_n^{(0)}(u, x) = (u-x)G_{1/4}^{(5/4)}(z) + (u+x)G_{3/4}^{(3/4)}(z)$$

d'où la formule (37), car

$$\pi^{1/2}S_n^{(0)}(u, x) = (u-x)g_n\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right) + (u+x)g_n\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

On a, en effet, grâce à (37) et pour $\delta = 0$,

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x+\epsilon}^{A} e^{-u^2}S_n^{(0)}(u, x)f(u)du \\ &= -\frac{e^{x^2/2}}{\pi}\int_{x+\epsilon}^{A} e^{-u^2/2}f(u)\cos\left[(u-x)(2n)^{1/2}\right]\frac{du}{u-x} \\ &\quad + O\left[\frac{1}{n^{1/2}}\int_{x+\epsilon}^{A}|f(u)|\,du\right], \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} I_4 = 0,$$

vu que $f(u)$ est sommable (L) dans tout intervalle fini. On trouve de même

$$\lim_{n=\infty} I_2 = 0$$

et il ne nous reste qu'à étudier I_3, car

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_n^{(0)}(x)}{n^{1/2}} = \lim_{n=\infty} I_3 = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} e^{-u^2}S_n^{(0)}(u, x)f(u)du.$$

En décomposant I_3 d'après (34), occupons nous d'abord du premier terme de cette décomposition, à savoir

$$\tau_1 = \frac{1}{n^{1/2}}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon}\phi(u)e^{-u^2}S_n^{(0)}(u, x)du$$

où dans l'intervalle $|u-x| \leqq \epsilon$ on a pour $\epsilon \to 0$

$$|\phi(u)| = |f(u) - f(x + o \operatorname{sgn}(u - x))| \leqq \theta(\epsilon) \to 0.$$

L'inégalité (29) qui pour $\delta=0$ s'écrit

$$S_n^{(0)}(u, x) = O\left(\frac{e^{(u^2+x^2)/2}n^{1/2}}{|u - x|}\right)$$

prouve que l'on a pour ϵ suffisamment petit

$$|\tau_1| \leqq O\left\{\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} |\phi(u)| \frac{du}{|u - x|}\right\} < \eta$$

si le produit $|(u-x)^{-1}\phi(u)|$ est intégrable au voisinage du point $u=x$. Cette condition que l'on peut noter,

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |f(x + u) - f(x + o \operatorname{sgn} u)| \frac{du}{|u|} < G, \tag{38}$$

et qui est suffisante pour le moment, est vérifiée, par exemple, si l'on a pour $h \to 0$

$$f(x + h) - f\left(x + o\frac{h}{|h|}\right) = O\left[\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-(1+\rho)}\right]$$

le nombre fixe ρ étant aussi petit qu'on veut, mais positif.

Etudions ensuite le dernier terme I_6 dans (34). Pour $\delta=0$ ce terme s'écrit

$$I_6 = \frac{f(x + 0)}{n^{1/2}}\int_{x+\epsilon}^{\infty} e^{-u^2}S_n^{(0)}(u, x)du + \frac{f(x - 0)}{n^{1/2}}\int_{-\infty}^{x-\epsilon} e^{-u^2}S_n^{(0)}(u, x)du.$$

Les inégalités (29) et (30) éliminent immédiatement les parties infinies $(-\infty, -A)$ et (A, ∞) tandis que pour $|u| \leqq A$, $|u-x| \geqq \epsilon$ on peut utiliser la formule approchée (37). On démontre ainsi que l'on a

$$\lim_{n=\infty} I_6 = 0.$$

On a ainsi

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(0)}(x)}{n^{1/2}} = [f(x + 0) - f(x - 0)] \lim_{n=\infty} \frac{j_n^{(0)}(x)}{n^{1/2}} = \frac{2^{1/2}}{\pi} D(x),$$

ce résultat étant acquis dans les hypothèses suivantes:
(I) $f(x)$ est sommable (L) dans tout intervalle fini;
(II) $f(x)$ vérifie la condition (33) avec $\delta=0$;
(III) $f(x)$ vérifie la condition (38).

La condition (38) peut d'ailleurs être remplacée par une autre, si l'allure de $f(x)$ au voisinage immédiat du point x est telle qu'en posant pour $u=x+t$, $|t| \leqq \epsilon$,

$$t\phi(x+t) = t\psi(t) = t[f(x+t) - f(x+o \operatorname{sgn} t)] = \int_0^t \chi(u)du$$

on puisse définir une fonction $\chi(t)$ vérifiant la condition

$$\int_0^t |\chi(u)|\, du \leqq At \tag{39}$$

où A est une constante positive aussi grande qu'on veut mais fixe. Supposant remplie la condition (39), donnons nous un nombre fixe θ aussi petit qu'on veut et positif et soit N assez grand pour avoir $3A\cdot 2^{1/2} < N\theta$.

La formule approchée (37) et l'inégalité

$$|S_n^{\prime(0)}(u, x)| \leqq \sum_0^n \frac{|H_m(x)H_{m+1}(u)|}{2^m m!\pi^{1/2}} = O(ne^{(u^2+x^2)/2}) \tag{40}$$

permettent d'écrire en décomposant τ_1 en trois termes:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{1}{n^{1/2}}\left\{\int_{x-\epsilon}^{x-N/n^{1/2}} + \int_{x-N/n^{1/2}}^{x+N/n^{1/2}} + \int_{x+N/n^{1/2}}^{x+\epsilon}\right\}\phi(u)e^{-u^2}S_n^{(0)}(u, x)du \\ &= \tau' + \tau'' + \tau'''.\end{aligned}$$

Grâce à (40) on a immédiatement

$$|\tau''| \leqq \frac{1}{n^{1/2}} \max_{|u-x|\leqq N/n^{1/2}} |\phi(u)|\, O(n)\, \frac{2N}{n^{1/2}} = O\left\{\max_{|u-x|\leqq N/n^{1/2}} |\phi(u)|\right\}$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \tau'' = 0,$$

car N est fixe. Ensuite la substitution $u=x-t$ nous donne

$$\begin{aligned}\tau''' &= -\frac{1}{\pi}\int_{N/n^{1/2}}^{\epsilon} e^{xt-t^2/2}\psi(t)\cos(t(2n)^{1/2})\frac{dt}{t} + O\left[\frac{\log n}{n^{1/2}}\right] \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{N/n^{1/2}}^{\epsilon} \cos(t(2n)^{1/2})\psi(t)\frac{dt}{t} + o(1) + o(\epsilon)\end{aligned}$$

et il suffit de prouver que le premier terme peut être rendu aussi petit qu'on veut en valeur absolue si $\chi(t)$ vérifie la condition (39). Intégrons le par parties:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{N/n^{1/2}}^{\epsilon} \frac{\cos(t(2n)^{1/2})}{t^2}\, t\psi(t)dt = \frac{N}{n^{1/2}}\,\psi\left(\frac{N}{n^{1/2}}\right)\vartheta_n\left(\frac{N}{n^{1/2}}\right) - \int_{N/n^{1/2}}^{\epsilon} \vartheta_n(t)\chi(t)dt$$

en posant

$$\vartheta_n(t) = \int_t^\epsilon u^{-2}\cos\,(u(2n)^{1/2})du.$$

Mais, il est évident que la fonction $\vartheta_n(t)$ vérifie l'inégalité $|\vartheta_n(t)| \leqq n^{-1/2}t^{-2}2^{1/2}$, car

$$\vartheta_n(t) = \frac{1}{t^2}\int_t^\xi \cos\,(t(2n)^{1/2})dt = \frac{\sin\,(\xi(2n)^{1/2}) - \sin\,(t(2n)^{1/2})}{t^2(2n)^{1/2}}.$$

Par conséquent, tenant compte du fait que $\psi(Nn^{-1/2})$ tend vers zéro quand $n\to\infty$, on trouve que la partie intégrée est $o(1)$ pour $n\to\infty$:

$$\frac{N}{n^{1/2}}\,\psi\left(\frac{N}{n^{1/2}}\right)\vartheta_n\left(\frac{N}{n^{1/2}}\right) = o\left(\frac{Nn2^{1/2}}{n^{1/2}N^2n^{1/2}}\right) = o\left(\frac{1}{N}\right) = o(1).$$

Quant à l'intégrale, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\int_{N/n^{1/2}}^\epsilon \vartheta_n(t)\chi(t)dt\right| &\leqq \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}\int_{N/n^{1/2}}^\epsilon t^{-2}|\,\chi(t)\,|\,dt \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}\left\{\left|\,\frac{1}{t^2}\int_0^t |\,\chi(u)\,|\,du\right|_{N/n^{1/2}}^\epsilon \right. \\ &\qquad \left. + 2\int_{N/n^{1/2}}^\epsilon \frac{dt}{t^3}\int_0^t |\,\chi(u)\,|\,du\right\} \\ &\leqq O(n^{-1/2}) + A\left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}\frac{n^{1/2}}{N} + 2\left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}A\int_{N/n^{1/2}}^\epsilon \frac{dt}{t^2} \\ &= o(1) + \frac{3A\,2^{1/2}}{N} < o(1) + \theta < 2\theta,\end{aligned}$$

pour n suffisamment grand.

3. Sommation $(C,\,\delta)$ de la série (10)

Considérons la série-noyau de (10),

$$(41)\qquad -\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}\,L_n^{(\alpha+1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(u) \sim 0 \qquad (u \neq x),$$

et désignons par $S_n^{(\delta)}(u,\,x)$ ses moyennes arithmétiques d'ordre δ. Celles $f_n^{(\delta)}(x)$ de la série

$$(10)\qquad -\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)L_n^{(\alpha+1)}(x)}{\Gamma(n+\alpha+2)}\int_0^\infty L_{n+1}^{(\alpha)}(u)e^{-u}u^\alpha f(u)du$$

s'expriment à l'aide des $S_n^{(\delta)}(u, x)$:

$$f_n^{(\delta)}(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha S_n^{(\delta)}(u, x) f(u) du. \tag{42}$$

Les moyennes $S_n^{(\delta)}(u, x)$ vérifient* les inégalités

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O\left\{\frac{e^{(x+u)/2} n^{(1-\delta)/2}}{(ux)^{\alpha/2+1/4} \mid u^{1/2} - x^{1/2} \mid^{\delta+1} x^{1/2}}\right\} \tag{43}$$

$$(0 \leqq u \leqq \infty,\ \delta \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq a),$$

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O\left(\frac{e^{(u+x)/2} n^{1/2}}{x^{\alpha/2+3/4} u^{\alpha/2+3/4+\delta}}\right) \quad (u \geqq e^2 n, \delta \geqq 0, 0 \leqq x \leqq a), \tag{44}$$

ainsi que celle

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O\left(\frac{e^{(u+x)/2} n}{(ux)^{\alpha/2+1/4} x^{1/2}}\right) \qquad (\delta \geqq 0), \tag{45}$$

dont voici la preuve pour u et x quelconques et $\delta \geqq 0$:

$$\begin{aligned} \mid S_n^{(\delta)}(u, x) \mid &\leqq [A_n^{(\delta)}]^{-1} \sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+\alpha+2)} \mid L_m^{(\alpha+1)}(x) L_{m+1}^{(\alpha)}(u) \mid \\ &= O\left\{n^{-\delta} \sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)} (m+1)^{-\alpha} e^{(x+u)/2} (m+1)^\alpha x^{-\alpha/2-3/4} u^{-\alpha/2-1/4}\right\} \\ &= O\{n^{-\delta} e^{(x+u)/2} (xu)^{-\alpha/2-3/4} u^{1/2} A_n^{(\delta+1)}\} = O\left\{\frac{e^{(x+u)/2} n}{(ux)^{\alpha/2+1/4} x^{1/2}}\right\}. \end{aligned}$$

Décomposons dans (42) l'intervalle d'intégration $(0, \infty)$ ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} &= \frac{1}{n^{1/2}} \int_0^\infty = (0, \infty) = \sum_{k=1}^7 J_k = \left(0, \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}, \eta\right) \\ &\quad + [\eta, x(1-\epsilon)^2] + [x(1-\epsilon)^2, x(1+\epsilon)^2] + [x(1+\epsilon)^2, A] \\ &\quad + [A, e^2 n] + [e^2 n, \infty] \end{aligned} \tag{46}$$

et supposons que $f(x)$, sommable (L) dans tout intervalle fini, vérifie en outre les deux conditions suivantes:

$$\int_a^\epsilon e^{-u/2} u^{\alpha/2-3/4-\delta} \mid f(u) \mid du < G, \tag{47}$$

$$\int_0^\epsilon u^\beta \mid f(u) \mid du < G, \tag{48}$$

---

* Voir E. Kogbetliantz, Journal of Mathematics and Physics, loc. cit., §5, (BL) et (F), dont on déduit facilement (44).

où le nombre β est égal au plus petit des deux nombres α et $(\alpha+\delta)/2-\frac{1}{4}$, donc

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{\alpha+\delta}{2} - \dfrac{1}{4} & \text{pour } \delta \leqq \alpha + \dfrac{1}{2}, \\ \alpha & \text{pour } \delta \geqq \alpha + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On a vu déjà au §1 que la sigma-somme d'ordre δ, $\sigma_n^{(\delta)}(u, x)$, de la série-noyau (41) vérifie pour $0 \leqq u \leqq 1/n$ l'inégalité

$$\sigma_n^{(\delta)}(u, x) = O(n^{(\alpha+\delta)/2+3/4}) \qquad \left(0 \leqq u \leqq \frac{1}{n}\,;\ \delta \geqq 0\right).$$

On en déduit pour $S_n^{(\delta)}(u, x)$ l'inégalité correspondante:

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = \frac{\sigma_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}} = O(n^{(\alpha-\delta)/2+3/4}),$$

ce qui permet de conclure pour $\delta \leqq \alpha + \frac{1}{2}$ ainsi:

$$\begin{aligned} J_1 &= O\left\{\frac{1}{n^{1/2}} \int_0^{1/n} e^{-u} u^\alpha \,|\, f(u) \,|\, n^{(\alpha-\delta)/2+3/4} du\right\} \\ &= O\left\{\int_0^{1/n} (nu)^{(\alpha-\delta)/2+1/4} u^{(\alpha+\delta)/2-1/4} \,|\, f(u) \,|\, du\right\} \\ &= O\left\{\int_0^{1/n} u^{(\alpha+\delta)/2-1/4} \,|\, f(u) \,|\, du\right\}. \end{aligned}$$

Au contraire, pour $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$ on trouve:

$$J_1 = O\left\{n^{(\alpha-\delta)/2+1/4} \int_0^{1/n} u^\alpha \,|\, f(u) \,|\, du\right\} = o\left\{\int_0^{1/n} u^\alpha \,|\, f(u) \,|\, du\right\}.$$

Dans l'intervalle $(1/n, \eta)$ nous avons d'après (43):

$$S_n^{(\delta)}(u, x) = O\left\{\frac{n^{(1-\delta)/2}}{(ux)^{\alpha/2+1/4} x^{(\delta+1)/2}}\right\} \qquad \left(\frac{1}{n} \leqq u \leqq \eta\right),$$

d'où, x étant fixe et positif:

$$\begin{aligned} J_2 &= O\left\{\frac{n^{(1-\delta)/2}}{n^{1/2}} \int_{1/n}^{\eta} u^{\alpha/2-1/4} \,|\, f(u) \,|\, du\right\} \\ &= O\left\{\int_{1/n}^{\eta} (nu)^{-\delta/2} u^{(\alpha+\delta)/2-1/4} \,|\, f(u) \,|\, du\right\} = O\left\{\int_{1/n}^{\eta} u^{(\alpha+\delta)/2-1/4} \,|\, f(u) \,|\, du\right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, quelque soit $\delta \geqq 0$ on trouve que

$$J_1 + J_2 = O\left\{ \int_0^{\eta} u^{\beta} \mid f(u) \mid du \right\}$$

et l'hypothèse (48) entraine la possibilité d'obtenir l'inégalité

$$(49) \qquad \mid J_1 + J_2 \mid \leqq \omega$$

quelque petit que soit $\omega > 0$, en choisissant η suffisamment petit: $\eta \leqq \eta_0 = \eta_0(\omega)$.

Pour évaluer les intégrales J_3 et J_5 nous allons distinguer deux cas: $\delta > 0$ et $\delta = 0$. Dans le premier cas l'inégalité (43) donne immédiatement

$$J_3 = O\left\{ \frac{1}{n^{1/2}} \int_{\eta}^{(1-\epsilon)^2 x} n^{(1-\delta)/2} \mid f(u) \mid du \right\} = O(n^{-\delta/2})$$

et de même pour J_5; donc pour $\delta > 0$ on a

$$(50) \qquad \lim_{n=\infty} J_3 = \lim_{n=\infty} J_5 = 0 \qquad (\delta \geqq 0).$$

Dans le second cas, $\delta = 0$, on est obligé d'employer la formule approchée*

$$(51) \qquad S_n^{(0)}(u, x) = -\frac{e^{(x+u)/2} n^{1/2} [\cos (2(u^{1/2} - x^{1/2}) n^{1/2}) + O(n^{-1/2})]}{2\pi u^{\alpha/2+1/4} x^{\alpha/2+3/4} (u^{1/2} - x^{1/2})}.$$

Il suffit de considérer J_3 et grâce à cette formule on a, après la substitution $u^{1/2} = (1-t)x^{1/2}$:

$$J_3 = \frac{1}{\pi x^{1/2}} \int_{\epsilon}^{1-(\eta/x)^{1/2}} \Psi(x, t) \cos (2t(nx)^{1/2}) dt + O(n^{-1/2}),$$

où

$$\Psi(x, t) = e^{xt - t^2/2} (1 - t)^{\alpha+1/2} t^{-1} f[x(1 - t)^2]$$

est sommable (L) dans l'intervalle $[\epsilon, 1 - (\eta/x)^{1/2}]$.

On justifie, par conséquent, le résultat (50) aussi pour $\delta = 0$.

Dans l'intervalle $(A, e^2 n)$, on obtient à l'aide de l'inégalité (43)

$$J_6 = O\left\{ n^{-\delta/2} \int_A^{e^2 n} e^{-u/2} u^{(\alpha-\delta)/2-3/4} \mid f(u) \mid du \right\}$$

$$= O\left\{ \int_A^{e^2 n} e^{-u/2} u^{\alpha/2-\delta-3/4} \mid f(u) \mid du \right\}$$

tandis que l'inégalité (44) entraîne

* Voir E. Kogbetliantz, Journal of Mathematics and Physics, loc. cit., §6, (21), où $S_n^{(\delta)}$ est désigné par $\partial L_n^{(\delta)}/\partial x$.

$$J_7 = O\left\{ \int_{\epsilon^2 n}^{\infty} e^{-u/2} u^{\alpha/2-\delta-3/4} \left| f(u) \right| du \right\}.$$

L'hypothèse (47) permet ainsi d'obtenir l'inégalité

$$J_6 + J_7 = O\left\{ \int_{A}^{\infty} e^{-u/2} u^{\alpha/2-\delta-3/4} \left| f(u) \right| du \right\} \leqq \omega$$

quelque petit que soit $\omega > 0$, en choisissant le nombre fixe A suffisamment grand: $A \geqq A_0 = A_0(\omega)$.

Ce dernier résultat joint à (49) et (50) permet de conclure

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} = \lim_{n=\infty} J_4 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x(1-\epsilon)^2}^{x(1+\epsilon)^2} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) f(u) du.$$

Soit

$$\phi(u) = f(u) - f(x + o \operatorname{sgn}(u - x)).$$

Pour évaluer la limite de l'intégrale J_4 nous la présentons ainsi:

$$J_4 = \frac{f(x+0)}{n^{1/2}} \int_{x}^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du + \frac{f(x-0)}{n^{1/2}} \int_{0}^{x} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du$$
$$+ \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x(1-\epsilon)^2}^{x(1+\epsilon)^2} \phi(u) e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du - J_8,$$

où

$$J_8 = \frac{f(x+0)}{n^{1/2}} \int_{x(1+\epsilon)^2}^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du + \frac{f(x-0)}{n^{1/2}} \int_{0}^{x(1-\epsilon)^2} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du.$$

Observons qu'en vertu de l'orthogonalité des polynomes de Laguerre on a

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du$$
$$= \sum_0^n \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+\alpha+2)} \cdot \frac{A_{n-m}^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}} \cdot L_m^{(\alpha+1)}(x) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} L_{m+1}^{(\alpha)}(u) du = 0,$$

ce qui permet de définir $\lambda_n^{(\delta)}(x)$ ainsi:

$$\lambda_n^{(\delta)}(x) = -\frac{1}{n^{1/2}} \int_0^x e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du = \frac{1}{n^{1/2}} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x) du.$$

La preuve du résultat cherché, à savoir:

(11)
$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\left(\delta+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{D(x)}{2(\pi x)^{1/2}} \qquad (\delta \geqq 0),$$

exige la détermination de la limite

$$l = \lim_{n=\infty} \lambda_n^{(\delta)}(x)$$

et l'étude des deux intégrales J_8 et J_9, la dernière étant définie par

$$J_9 = \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x(1-\epsilon)^2}^{x(1+\epsilon)^2} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x)\phi(u)du.$$

Vu que la borne supérieure $\theta(\epsilon)$ de la valeur absolue de $\phi(u)$ dans l'intervalle $[x(1-\epsilon)^2, x(1+\epsilon)^2]$ tend vers zéro avec ϵ, on a dans le cas $\delta>0$ et grâce aux inégalités (43) et (45) le résultat

(52)
$$J_9 = O[\theta(\epsilon)] < \omega$$

si ϵ est suffisamment petit: $\epsilon \leqq \epsilon_0 = \epsilon_0(\omega)$.

En effet, décomposons l'intervalle d'intégration en trois intervalles:

$$\begin{aligned} J_9 = \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x(1-\epsilon)^2}^{x(1+\epsilon)^2} = [x(1-\epsilon)^2, x(1+\epsilon)^2] &= \left[x(1-\epsilon)^2, x\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)^2\right] \\ &+ \left[x\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)^2, x\left(1+\frac{1}{n^{1/2}}\right)^2\right] \\ &+ \left[x\left(1+\frac{1}{n^{1/2}}\right)^2, x(1+\epsilon)^2\right] \\ &= \sum_1^3 i_k. \end{aligned}$$

L'inégalité (45) nous donne, étant donné que $|\phi(u)| \leqq \theta(\epsilon)$,

$$|i_2| \leqq \frac{\theta(\epsilon)}{n^{1/2}} \int_{x(1-n^{-1/2})^2}^{x(1+n^{-1/2})^2} O(n)du = O[\theta(\epsilon)],$$

tandis que celle (43) appliquée aux intégrales i_1 et i_3 conduit à écrire, en employant la substitution $u^{1/2}=(1+t)x^{1/2}$,

$$i_1 + i_3 = O\left[n^{-\delta/2} \int_{n^{-1/2}}^{\epsilon} \theta(\epsilon) \frac{dt}{t^{\delta+1}}\right] = O[\theta(\epsilon)] \qquad (\delta > 0),$$

ce qui achève la preuve de (52) pour $\delta>0$.

De même le terme J_8 est facile à évaluer, si $\delta>0$. L'inégalité (43) donne en effet pour $\delta>0$

$$J_8 = O\left[n^{-\delta/2}\int_0^\infty e^{-u/2}u^{\alpha/2-1/4}du\right] = O(n^{-\delta/2})$$

donc on a démontré le résultat cherché,

$$\lim_{n=\infty} J_8 = 0 \qquad (\delta \geqq 0) \tag{53}$$

pour $\delta>0$. C'est le cas $\delta=0$ qui exige une analyse plus approfondie basée sur la formule approchée (51). Soit donc $\delta=0$ et supposons qu'au voisinage immédiat $|u-x|\leqq\gamma$ du point $u=x$ la fonction $f(u)$ vérifie la condition (38), c'est à dire l'intégrale définie

$$\int_{x-\gamma}^{x+\gamma} |\phi(u)|\frac{du}{|u|} < G \tag{38}$$

existe. Dans cette hypothèse (38) et grâce à l'inégalité (43) on obtient immédiatement

$$J_9 = O\left\{\int_{x(1-\epsilon)^2}^{x(1+\epsilon)^2} |\phi(u)|\frac{du}{|u|}\right\} < \omega,$$

quelque petit que soit $\omega>0$ pourvu que ϵ soit assez petit: $\epsilon\leqq\epsilon_0=\epsilon_0(\omega)$. Quant au terme J_8 on trouve grâce à (51), en posant $(u^{1/2}-x^{1/2})\xi(u)e^{u/2}=u^{\alpha/2-1/4}$:

$$\begin{aligned}2\pi J_8 = &- x^{-\alpha/2-3/4}e^{x/2}\left\{f(x+0)\int_{x(1+\epsilon)^2}^{A}\xi(u)\cos\left[2(u^{1/2}-x^{1/2})n^{1/2}\right]du\right.\\ &\left.+ f(x-0)\int_0^{x(1-\epsilon)^2}\xi(u)\cos\left[2(u^{1/2}-x^{1/2})n^{1/2}\right]du\right\} + O(n^{-1/2})\\ &+ O\left[n^{-1/2}\int_A^\infty e^{-u}u^{\alpha}|S_n^{(0)}(u,x)|\,du\right].\end{aligned}$$

Vu que $\xi(u)$ est sommable (L) dans les intervalles $[0,\ x(1-\epsilon)^2]$ et $[x(1+\epsilon)^2,\ A]$ on constate que les termes entre les parenthèses tendent vers zéro quand $n\to\infty$.

Quant au dernier terme, les inégalités (43) et (44) permettent de l'écrire ainsi:

$$O\left\{n^{-1/2}\int_A^\infty e^{-u}u^{\alpha}|S_n^{(0)}(u,x)|\,du\right\} = O\left\{\int_A^\infty e^{-u/2}u^{\alpha/2-\delta-3/4}du\right\} < \omega$$

pourvu que le nombre fixe A soit assez grand: $A\geqq A_0(\omega)$.

On parvient ainsi dans le cas $\delta=0$ sous l'unique condition (38) au résultat:

$$(54)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(\delta)}(x)}{n^{1/2}} = [f(x+0) - f(x-0)] \lim_{n=\infty} \lambda_n^{(\delta)}(x) \qquad (\delta \geqq 0)$$

démontré déjà pour $\delta > 0$.

Observons que la condition (38) peut être remplacée par celle (39). Supposons que l'allure de $f(u)$ au voisinage du point x permet de définir une fonction $\chi(t)$ vérifiant la condition

$$(39)\qquad \int_0^t |\chi(u)|\, du \leqq At$$

et telle que

$$t\phi(x+t) = t\left\{f(x+t) - f\left(x + o\frac{t}{|t|}\right)\right\} = \int_0^t \chi(u)du.$$

Décomposons l'intervalle d'intégration dans

$$J_9 = \frac{1}{n^{1/2}} \int_{x(1-\epsilon)^2}^{x(1+\epsilon)^2} e^{-u} u^{\alpha} S_n^{(\delta)}(u, x)\phi(u)du$$

en trois intervalles partiels ainsi:

$$\begin{aligned} J_9 &= [x(1-\epsilon)^2, x(1+\epsilon)^2] \\ &= \left[x(1-\epsilon)^2,\ x\left(1 - \frac{N}{n^{1/2}}\right)^2\right] + \left[x\left(1 - \frac{N}{n^{1/2}}\right)^2,\ x\left(1 + \frac{N}{n^{1/2}}\right)^2\right] \\ &\quad + \left[x\left(1 + \frac{N}{n^{1/2}}\right)^2,\ x(1+\epsilon)^2\right] = j_1 + j_2 + j_3, \end{aligned}$$

le nombre N étant suffisamment grand pour avoir $4A < \pi x\omega N$, où ω est une quantité positive choisie d'avance et aussi petite qu'on veut. L'intégrale j_2 est facile à évaluer à l'aide de l'inégalité (45). On obtient ainsi, tenant compte du fait que la borne supérieure $\theta(\epsilon)$ de $|\phi(u)|$ dans l'intervalle $[x(1-\epsilon)^2, x(1+\epsilon)^2]$ tend vers zéro avec ϵ,

$$j_2 = O\left[n^{-1/2} n\theta\left(\frac{N}{n^{1/2}}\right) \int_{x(1-Nn^{-1/2})^2}^{x(1+Nn^{-1/2})^2} du\right] = O\left[\theta\left(\frac{N}{n^{1/2}}\right)\right] = o(1),$$

c'est à dire

$$\lim_{n=\infty} j_2 = 0.$$

Il suffit de considérer ensuite j_3, car le même raisonnement s'applique à j_1. A l'aide de la formule approchée (51) et de la substitution $u^{1/2} = (1+t)x^{1/2}$ on donne à j_3 la forme suivante:

$$j_3 = -\frac{1}{\pi x^{1/2}}\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} [1+O(t)]\phi[x(1+t)^2]\cos(2t(nx)^{1/2})\frac{dt}{t} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$
$$= -\frac{1}{\pi x^{1/2}}\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} \phi[x(1+t)^2]\cos(2t(nx)^{1/2})\frac{dt}{t} + O\left(\frac{\log n}{n}\right) + O[\epsilon\theta(\epsilon)].$$

Or,

$$xt(2+t)\phi(x+2xt+xt^2) = \int_0^{xt(2+t)} \chi(u)du$$

entraîne grâce à la condition (39) que nous supposons remplie

$$\phi[x(1+t)^2] = \frac{1}{2xt}\int_0^{xt(2+t)} \chi(u)du + O(t)$$

d'où par conséquent

$$-\frac{1}{\pi x^{1/2}}\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} \phi[x(1+t)^2]\cos(2t(nx)^{1/2})\frac{dt}{t}$$
$$= -\frac{1}{2\pi x^{3/2}}\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} \cos(2t(nx)^{1/2})\frac{dt}{t^2}\int_0^{xt(2+t)} \chi(u)du + O(\epsilon).$$

Posons

$$\vartheta_n(x,t) = -\int_t^{\epsilon} \cos(2\tau(nx)^{1/2})\frac{d\tau}{\tau^2}$$

et intégrons par parties. On trouve ainsi

$$j_3 = O\left(\frac{\log n}{n}\right) + O(\epsilon) + \frac{1}{2\pi x^{3/2}}\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} d\vartheta_n(x,t)\int_0^{xt(2+t)} \chi(u)du$$
$$= o(1) + O(\epsilon) + \frac{1}{2\pi x^{3/2}}\left\{\left|\vartheta_n(x,t)\int_0^{xt(2+t)}\chi(u)du\right|_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon}\right.$$
$$\left. - 2x\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} \vartheta_n(x,t)\chi[xt(2+t)](1+t)dt\right\}.$$

Or, pour $t\to 0$ on a

$$\int_0^{xt(2+t)} \chi(u)du = 2xt\phi[x(1+t)^2] + O(t^2) = o(xt) \qquad (t\to 0),$$

donc pour $n\to\infty$

$$\left|\frac{\vartheta_n(x,t)}{2\pi x^{3/2}}\int_0^{xt(2+t)}\chi(u)du\right|_{t=Nn^{-1/2}} = o\left\{\frac{N}{(nx)^{1/2}}\vartheta_n\left(x,\frac{N}{n^{1/2}}\right)\right\} \qquad (n\to\infty).$$

D'ailleurs

$$|\vartheta_n(x,t)| = \frac{1}{t^2}\left|\int_t^{\xi} \cos\left(2\tau(nx)^{1/2}\right)d\tau\right| \leqq \frac{1}{t^2(nx)^{1/2}},$$

ce qui entraîne pour $n\to\infty$

$$|j_3| \leqq O(\epsilon) + o(1) + o\left(\frac{N}{(nx)^{1/2}}\cdot\frac{n}{N^2(nx)^{1/2}}\right)$$

$$+\frac{1+\epsilon}{\pi x^{1/2}}\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon}\frac{|\chi[xu(2+u)]|\,du}{u^2(nx)^{1/2}} = O(\epsilon) + o(1) + \frac{1+\epsilon}{\pi x n^{1/2}}j_4.$$

Une nouvelle intégration par parties transforme l'intégrale j_4 en

$$j_4 = \left| t^{-2}\int_0^t |\chi[xu(2+u)]|\,du\right|_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon} + 2\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon}\frac{dt}{t^3}\int_0^t |\chi[xu(2+u)]|du.$$

On a, en vertu de (39) et en posant $xu(2+u)=\tau$,

$$\int_0^t |\chi[xu(2+u)]|\,du = \int_0^{xt(2+t)}|\chi(\tau)|\frac{d\tau}{2x(1+u)}$$

$$< \frac{Axt(2+t)}{2x} < (1+\epsilon)At.$$

Par conséquent:

$$|j_4| \leqq \frac{A}{\epsilon}(1+\epsilon) + \frac{1+\epsilon}{N}An^{1/2} + 2(1+\epsilon)A\int_{Nn^{-1/2}}^{\epsilon}\frac{dt}{t^2} \leqq \frac{3A(1+\epsilon)n^{1/2}}{N},$$

ce qui entraîne

$$|j_3| \leqq O(\epsilon) + o(1) + \frac{3A(1+\epsilon)^2}{\pi x N} < 2\omega$$

quelque petit que soit $\omega>0$, pourvu que ϵ soit assez petit et n assez grand.

Ce raisonnement prouve qu'au cas, où $\delta=0$, la condition (39) est suffisante pour assurer le résultat (54).

Pour achever la démonstration de (11) il suffit de calculer la limite de $\lambda_n^{(\delta)}(x)$ quand $n\to\infty$. L'identité

$$m!e^{-u}u^{\alpha}L_m^{(\alpha)}(u) = \frac{d^m}{du^m}\left(e^{-u}u^{m+\alpha}\right)$$

entraîne évidemment

$$-\Gamma(m+2)\int_x^{\infty} e^{-u}u^{\alpha}L_{m+1}^{(\alpha)}(u)du = m!e^{-x}x^{\alpha+1}L_m^{(\alpha+1)}(x),$$

et cette relation permet d'écrire

$$\lambda_n^{(\delta)}(x) = -\frac{1}{A_n^{(\delta)}n^{1/2}}\sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)}\frac{\Gamma(m+2)L_m^{(\alpha+1)}(x)}{\Gamma(m+\alpha+2)}\int_x^\infty e^{-u}u^\alpha L_{m+1}^{(\alpha)}(u)du$$

$$= \frac{e^{-x}x^{\alpha+1}}{A_n^{(\delta)}n^{1/2}}\sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)}\frac{\Gamma(m+1)\left[L_m^{(\alpha+1)}(x)\right]^2}{\Gamma(m+\alpha+2)} = \frac{\mu_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}n^{1/2}}.$$

Or, la relation

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+2)}\left[L_m^{(\alpha+1)}(x)\right]^2 z^m = \frac{e^{-2xz/(1-z)}I_{\alpha+1}\left(\dfrac{2xz^{1/2}}{1-z}\right)}{(xz^{1/2})^{\alpha+1}(1-z)}$$

entraîne cette autre relation:

$$\sum_0^\infty \mu_n^{(\delta)}z^n = M_\delta(z) = z^{-(\alpha+1)/2}(1-z)^{-\delta-2}e^{-x(1+z)/(1-z)}I_{\alpha+1}\left(\frac{2xz^{1/2}}{1-z}\right).$$

L'allure du second membre pour $z\to 1$ est facile à préciser à l'aide de la formule approchée (21) et l'on obtient ainsi:

$$M_\delta(z) = \frac{\exp\left[-x(1-z^{1/2})/(1+z^{1/2})\right]}{2(\pi x)^{1/2}}\,\frac{1+O(|1-z|)}{(1-z)^{\delta+3/2}}.$$

Pour trouver une formule approchée du coefficient $\mu_n^{(\delta)}$ de la fonction $M_\delta(z)$ il suffit de développer la fonction auxiliaire

$$\frac{1}{2(\pi x)^{1/2}(1-z)^{\delta+3/2}} = \frac{1}{2(\pi x)^{1/2}}\sum_0^\infty A_n^{(\delta+1/2)}z^n,$$

d'où enfin

$$\lambda_n^{(\delta)} = \frac{\mu_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}n^{1/2}} = \frac{1}{2(\pi xn)^{1/2}}\cdot\frac{A_n^{(\delta+1/2)}}{A_n^{(\delta)}}\left[1+o(1)\right]$$

et par conséquent, vu que $\Gamma(\delta+1)A_n^{(\delta)} = n^\delta[1+o(1)]$,

$$\lim_{n=\infty}\lambda_n^{(\delta)}(x) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{2(\pi x)^{1/2}\Gamma\left(\delta+\dfrac{3}{2}\right)},$$

ce qui achève la démonstration de (11).

UNIVERSITÉ DE TÉHÉRAN,
TÉHÉRAN, IRAN