MITTELWERTE ARITHMETISCHER FUNKTIONEN IN ZAHLKÖRPERN*

VON

CARL LUDWIG SIEGEL

Es sei $f(\xi)$ eine Funktion, die für alle ganzen Zahlen eines total reellen algebraischen Zahlkörpers K vom $n$ten Grade definiert ist. Man ordne ξ den Punkt im n-dimensionalen Raume zu, dessen Coordinaten die n Conjugierten von ξ sind. Für irgend ein Gebiet G jenes Raumes bilde man die Summe

$$F = \sum_{\xi \text{ in } G} f(\xi), \tag{1}$$

in der ξ alle ganzen Zahlen von K durchlaufe, für welche der zugeordnete Punkt ξ in G liegt. Bei einigen Untersuchungen in der Zahlentheorie ist es nötig, eine asymptotische Annäherung von F zu finden, wenn G in gewisser Weise unendlich wird. Hierbei kann die im folgenden hergeleitete Formel von Nutzen sein, die eine Art Verallgemeinerung der bekannten Formel für die Summe der Coefficienten einer Dirichletschen Reihe ist. Ihre Anwendung wird dann an dem Beispiel des Teilerproblems erläutert.

Zwecks einfacherer Darstellung soll nur der Specialfall des reellen quadratischen Körpers behandelt werden. Die Übertragung auf den Fall eines total reellen Körpers beliebigen Grades bietet keine gedanklichen Schwierigkeiten.

1. Die Summenformel

Weiterhin sollen nur solche arithmetischen Funktionen $f(\xi)$ betrachtet werden, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzen: Es soll in K eine Einheit $\epsilon \neq \pm 1$ geben, so dass $f(\epsilon\xi) = f(\xi)$ ist; ferner soll, wenn ξ' die Conjugierte von ξ bedeutet, für eine geeignete positive Constante c und $\xi \neq 0$ die Funktion $f(\xi)|\xi\xi'|^{-c}$ beschränkt sein. Offenbar darf man $\epsilon > 1$, $\epsilon' > 0$ voraussetzen. Zwei Zahlen ξ, η aus K mögen associiert heissen, wenn $\xi\eta^{-1}$ eine Potenz von ϵ ist. Man lasse nun ξ ein volles System nicht-associierter ganzer total positiver Zahlen durchlaufen und bilde die Dirichletschen Reihen

$$\phi_k(s) = \sum{}' f(\xi)(\xi\xi')^{-s}(\xi/\xi')^{\pi i k/\log \epsilon} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{2}$$

Sie sind in der Halbebene $\sigma > c+1$ absolut convergent.

Zunächst werde für das Gebiet G das Rechteck $0 < \xi x < 1$, $0 < \xi' x' < 1$

* Presented to the Society, October 26, 1935; received by the editors March 25, 1935.

genommen, wo x und x' positive Zahlen sind, und für irgend ein $r>1$ die Summe (1) mit $f(\xi)(1-\xi x)^{r-1}(1-\xi' x')^{r-1}$ statt $f(\xi)$ betrachtet. Für die Summe

$$g(x, x') = \sum_{\substack{0<\xi x<1 \\ 0<\xi' x'<1}} f(\xi)(1 - \xi x)^{r-1}(1 - \xi' x')^{r-1}$$

gilt dann

Satz 1. *Es ist*

$$\begin{aligned} g(x, x') = \frac{1}{2\pi i \log \epsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} (xx')^{-s} \left(\frac{x}{x'}\right)^{\pi i k/\log \epsilon} \\ \cdot B\left(r, s - \frac{\pi i k}{\log \epsilon}\right) B\left(r, s + \frac{\pi i k}{\log \epsilon}\right) \phi_k(s) ds, \end{aligned} \tag{3}$$

falls $\sigma > c+1$ ist und das Zeichen B die Eulersche Betafunktion bedeutet.

Aus den bekannten Eigenschaften der Betafunktion folgt, dass das Integral in (3) als Funktion von k die Grössenordnung von $|k|^{-r}$ hat. Die unendliche Reihe in (3) ist daher absolut convergent. Setzt man

$$x = u\epsilon^{v}, \qquad x' = u\epsilon^{-v},$$

so wird die rechte Seite von (3) eine trigonometrische Reihe in bezug auf die Variable v mit der Periode 1. Daher hat man nur noch nachzurechnen, dass der Fouriersche Coefficient

$$a_k(u) = \int_0^1 g(u\epsilon^{v}, u\epsilon^{-v}) e^{-2\pi i k v} dv$$

mit dem Coefficienten vom $e^{2\pi i k v}$ auf der rechten Seite von (3) übereinstimmt.

Bedeutet der Strich am Summenzeichen, dass nur über nicht associierte ξ summiert wird, so ist

$$a_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^{\pi i k/\log \epsilon} \sum_{\substack{0<\xi x<1 \\ 0<\xi' x'<1}}{}' f(\xi)(1 - \xi x)^{r-1}(1 - \xi' x')^{r-1} dv.$$

Für $\sigma > c+1$ gilt demnach

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} u^{2s-1} a_k(u) du \\ &= \frac{1}{2 \log \epsilon} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (xx')^{s-1} \left(\frac{x'}{x}\right)^{\pi i k/\log \epsilon} \sum_{\substack{0<\xi x<1 \\ 0<\xi' x'<1}}{}' f(\xi)(1 - \xi x)^{r-1}(1 - \xi' x')^{r-1} dx dx' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\log\epsilon}\sum{}' f(\xi)\int_0^{\xi^{-1}} x^{s-\pi ik/\log\epsilon-1}(1-\xi x)^{r-1}dx\int_0^{\xi'^{-1}} x'^{s+\pi ik/\log\epsilon-1}(1-\xi' x')^{r-1}dx'$$

$$= \frac{1}{2\log\epsilon} B\left(r, s-\frac{\pi ik}{\log\epsilon}\right) B\left(r, s+\frac{\pi ik}{\log\epsilon}\right)\phi_k(s).$$

Hieraus folgt vermöge der Mellinschen Umkehrformel die Beziehung

$$a_k(u) = \frac{1}{2\pi i\log\epsilon}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} u^{-2s} B\left(r, s-\frac{\pi ik}{\log\epsilon}\right) B\left(r, s+\frac{\pi ik}{\log\epsilon}\right)\phi_k(s)ds$$

und damit die Behauptung.

Für den speciellen Fall $r=2$ wird

$$xx'g(x^{-1}, x'^{-1}) = \int_0^x\int_0^{x'}\sum_{\substack{0<\xi<v\\ 0<\xi'<v'}} f(\xi)dvdv'.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(4)\qquad \sum_{\substack{0<\xi<v\\ 0<\xi'<v'}} f(\xi) = F(v, v'),\quad s-\frac{\pi ik}{\log\epsilon} = s_k,\quad s+\frac{\pi ik}{\log\epsilon} = s_k'$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

so gilt für positive y, y'

Satz 2.

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\int_0^v\int_0^{v'} F(x+v, x'+v')dvdv'\\ &= \frac{1}{2\pi i\log\epsilon}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\frac{(x+y)^{s_k+1}-x^{s_k+1}}{s_k(s_k+1)}\,\frac{(x'+y')^{s_k'+1}-x'^{s_k'+1}}{s_k'(s_k'+1)}\phi_k(s)ds.\end{aligned}$$

In Analogie zur Formel für die Coefficientensumme einer Dirichletschen Reihe ist (5) dann nützlich, wenn die Funktionen $\phi_k(s)$ über die Halbebene absoluter Convergenz der Reihen (2) hinaus fortsetzbar sind. Dann liefert nämlich vielfach der Residuensatz einen asymptotischen Ausdruck für die rechte Seite von (5).

Von (5) ausgehend kann man in verschiedener Weise zu einem Näherungswert für die in (1) definierte Summe F gelangen. Ist insbesondere $f(\xi)$ nichtnegativ, so ist nach (4)

$$F(x, x') \leqq F(x+v, x'+v') \leqq F(x+y, x'+y')$$

für $0\leqq v\leqq y$, $0\leqq v'\leqq y'$, und daher

$$(6)\qquad F(x, x') \leqq \frac{1}{yy'}\int_0^v\int_0^{v'} F(x+v, x'+v')dvdv' \leqq F(x+y, x'+y').$$

Eine asymptotische Abschätzung des mittleren Gliedes dieser Ungleichung führt also auch zu einer Annäherung von $F(x, x')$. Nun ist $F(x, x')$ der Specialfall der allgemeineren Summe F, in welchem das Gebiet G das Rechteck $0<\xi<x$, $0<\xi'<x'$ bedeutet. Um zu einer Aussage über F selbst zu kommen, hat man noch G durch Addition und Subtraction jener speciellen Rechtecke anzunähern.

Man kann übrigens auch eine explicite Formel für F angeben. Es gilt nämlich

$$F = \frac{1}{2\pi i \log \epsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} \phi_k(s) \left(\iint_G x^{s_k-1} x'^{s_k'-1} dx dx' \right) ds, \tag{7}$$

falls G von einer differentiierbaren Curve im ersten Quadranten begrenzt wird, die durch kein ganzzahliges ξ geht. Da aber für die Anwendungen Satz 2 viel praktischer ist, so sei auf den etwas mühsamen Beweis von (7) verzichtet.

2. Das Teilerproblem

Einige Beispiele von arithmetischen Funktionen, deren Mittelwerte unter Benutzung von Satz 2 berechnet werden können, sind (1) Anzahl der nicht associierten total positiven Teiler von ξ; (2) Anzahl der Idealteiler von ξ; (3) Anzahl der Zerlegungen von ξ in zwei ganze Quadratzahlen aus K; (4) Restclassencharakter; (5) $e^{2\pi i S(\gamma\xi)}$, wo S die Spur bedeutet und γ irgend eine gebrochene Zahl aus K ist; (6) 1 oder 0, je nachdem ξ Primzahl ist oder nicht.

Es soll hier nur das erste Beispiel behandelt werden. Es sei ϵ die Fundamentaleinheit der total positiven Einheiten von K, und d die Discriminante von K. Setzt man

$$\sum{}'(\xi\xi')^{-s}(\xi/\xi')^{\pi i k/\log \epsilon} = \zeta_k(s) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{8}$$

wo ξ alle nicht-associierten ganzen total positiven Zahlen durchlaufe, so geht (2) über in die Gleichung

$$\phi_k(s) = \zeta_k^2(s).$$

Wie Hecke gezeigt hat, ist $\zeta_k(s)$ für $k \neq 0$ eine ganze Funktion von s. Ferner ist auch die Funktion $\zeta_0(s) - (\log \epsilon/d^{1/2})(s-1)^{-1}$ ganz; bei $s=1$ habe sie den Wert γ, der übrigens nach Hecke und Herglotz unter Benutzung der Kroneckerschen Grenzformel berechnet werden kann. Da die Reihe (8) für $\sigma>1$ absolut convergiert, so kann σ in (5) für den vorliegenden Fall irgend eine Zahl >1 bedeuten. Aus dem von Hecke näher untersuchten Verhalten von $\zeta_k(s)$ in kritischen Streifen $0<\sigma<1$ geht hervor, dass die Integration über s in (5) auch auf einer beliebigen Geraden des kritischen Streifens erfolgen kann, wenn noch das Residuum der Funktion

$$\frac{(x+y)^{s+1}-x^{s+1}}{s(s+1)}\,\frac{(x'+y')^{s+1}-x'^{(s+1)}}{s(s+1)}\,\zeta_0^2(s)$$

bei $s=1$ berücksichtigt wird. Wegen

$$\frac{(x+y)^{s+1}-x^{s+1}}{s(s+1)}\,\frac{(x'+y')^{s+1}-x'^{(s+1)}}{s(s+1)}$$
$$=\int_0^y\int_0^{y'}\left(\int_0^{x+v}\int_0^{x'+v'}(uu')^{s-1}du\,du'\right)dv\,dv'$$

hat das Residuum den Wert

$$\int_0^y\int_0^{y'}\left(\int_0^{x+v}\int_0^{x'+v'}\left(\frac{\log^2\epsilon}{d}\log(uu')+\frac{2\log\epsilon}{d^{1/2}}\gamma\right)du\,du'\right)dv\,dv'.$$

Da nun ferner die Funktion

$$\zeta_k(s)\left(1+\left|t+\frac{\pi k}{\log\epsilon}\right|\right)^{(\sigma-1)/2}\left(1+\left|t-\frac{\pi k}{\log\epsilon}\right|\right)^{(\sigma-1)/2}$$

für $s=\sigma+ti$ gleichmässig in k beschränkt ist, so kann man die Integrale auf der rechten Seite von (5) abschätzen und erhält

$$\begin{aligned}&\int_0^y\int_0^{y'}F(x+v,\,x'+v')\,dv\,dv'\\ (9)\qquad &=\int_0^y\int_0^{y'}\left(\int_0^{x+v}\int_0^{x'+v'}\left(\frac{\log\epsilon}{d}\log(uu')+\frac{2\gamma}{d^{1/2}}\right)du\,du'\right)dv\,dv'\\ &\quad+O((x+y)^{\sigma+1}(x'+y')^{\sigma+1})\end{aligned}$$

für jedes $\sigma>0$. Die günstigste Wahl von y, y' ist

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}=(xx')^{-1/3};$$

aus (6) und (9) folgt dann

$$(10)\qquad F(x,\,x')=\int_0^x\int_0^{x'}\left(\frac{\log\epsilon}{d}\log(uu')+\frac{2\gamma}{d^{1/2}}\right)du\,du'+O((xx')^{2/3+\delta})$$

für jedes $\delta>0$.

Nun sei R irgend ein Rechteck $a\leqq x\leqq b$, $a'\leqq y\leqq b'$ im ersten Quadranten und $\tau(\xi)$ die Anzahl der nicht associierten total positiven Teiler von ξ. Nach (4) und (10) gilt dann

$$(11)\qquad \sum_{\xi \text{ in } R} \tau(\xi) = \iint_R \left(\frac{\log \epsilon}{d} \log (uu') + \frac{2\gamma}{d^{1/2}} \right) du du' + O((bb')^{2/3+\delta}).$$

Diese Formel lässt sich leicht auf allgemeinere Bereiche übertragen. Es liege G ganz im ersten Quadranten und habe den Inhalt J. Enthält dann G den Punkt $\xi = 1$ und ist der Umfang von G höchstens von der Grössenordnung J^α, wo α eine feste positive Zahl $<3/5$ bedeutet, so ist nach (11)

$$\sum_{\xi \text{ in } G} \tau(\xi) = \iint_G \left(\frac{\log \epsilon}{d} \log (uu') + \frac{2\gamma}{d^{1/2}} \right) du du' + o(J).$$

Institute for Advanced Study,
Princeton, N. J.