ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN INTEGRALE DES RESTRINGIERTEN DREIKÖRPERPROBLEMS*†

VON
CARL LUDWIG SIEGEL

Unter den wenigen allgemeinen Erkenntnissen, die man bei der Untersuchung des Dreikörperproblems in den letzten Jahrzehnten gewonnen hat, ist der Satz von Bruns trotz seines negativen Charakters von Interesse. Er besagt, dass durch die bekannten 10 Integrale, nämlich die 6 Schwerpunktsintegrale, die 3 Flächenintegrale und das Energieintegral, sämtliche algebraischen Integrale des Problems erschöpft sind, oder in anderer Ausdrucksweise, dass der Körper derjenigen algebraischen Funktionen der Zeit und der 9 rechtwinkligen Coordinaten der drei Massenpunkte und der 9 Ableitungen dieser Coordinaten nach der Zeit, welche auf jeder Bahncurve constant sind, von genau 10 Variabeln abhängig ist.

Im folgenden soll ein analoger Satz für das restringierte Dreikörperproblem bewiesen werden, also für den Grenzfall des allgemeinen Dreikörperproblems, bei dem die Bewegung in einer Ebene stattfindet, zwei Körper eine Kreisbahn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben und der dritte Körper die Masse 0 besitzt. Wählt man in der Ebene der drei Körper ein rechtwinkliges cartesisches Coordinatensystem, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt ist, und das sich so um diesen Schwerpunkt dreht, dass die beiden ersten Körper in bezug auf das Coordinatensystem in Ruhe sind, so lauten die Differentialgleichungen für die Bewegung des dritten Körpers

$$(1)\quad \ddot{x} = 2\dot{y} + V_x, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + V_y;$$

dabei ist

$$V = \mu_1(\tfrac{1}{2}r^2 + r^{-1}) + \mu(\tfrac{1}{2}r_1^2 + r_1^{-1}),$$
$$r^2 = (x-\mu)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x+\mu_1)^2 + y^2, \quad \mu + \mu_1 = 1, \quad 0 < \mu < 1.$$

Die Schwerpunktsintegrale und die Flächenintegrale des allgemeinen Dreikörperproblems fallen im restringierten Problem fort. An die Stelle des Energieintegrals tritt das Jacobische Integral

$$(2)\qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2V = \text{constans}.$$

Ein algebraisches Integral von (1) ist nun eine solche algebraische Funktion

* Presented to the Society, October 26, 1935; received by the editors March 19, 1935.
† Paul Epstein gewidmet.

$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ der Ortscoordinaten x, y, der Geschwindigkeitscoordinaten $\dot{x}, \dot{y}$, und der Zeit t, welche auf grund von (1) constant ist; d.h. es muss der Ausdruck

$$\dot{x}f_x + \dot{y}f_y + (2\dot{y} + V_x)f_{\dot{x}} + (-2\dot{x} + V_y)f_{\dot{y}} + f_t$$

identisch in seinen 5 Argumenten verschwinden. Bedeutet $\phi(z)$ eine algebraische Funktion einer Variabeln z, so ist $\phi(\dot{x}^2+\dot{y}^2-2V)$ nach (2) ein algebraisches Integral von (1). Es soll bewiesen werden, dass jedes algebraische Integral von (1) diese Form hat.

Dieser Satz ist nicht im Resultat von Bruns als specieller Fall enthalten, denn durch die Beschränkung der Freiheitsgrade könnte ja gerade das Auftreten neuer algebraischer Integrale ermöglicht werden. Die Specialisierung bringt es vielmehr mit sich, dass der Brunssche Beweis nicht ohne weiteres übertragen werden kann; insbesondere sind auch einige Schwierigkeiten zu überwinden, die von der Bewegung des Coordinatensystems herrühren.

1. Es sei Ω der Körper aller complexen Zahlen und $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t)$ der durch Adjunction von $\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t$ zu Ω entstehende Körper. Bedeutet f ein algebraisches Integral des restringierten Dreikörperproblems, so sei

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3}$$

die in $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t)$ irreducible Gleichung für f, in der also $a_1, \cdots, a_n$ rationale Funktionen von $\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t$ sind. Durch totale Differentiation nach t folgt, dass die Gleichung

$$\dot{a}_1 f^{n-1} + \cdots + \dot{a}_n = 0 \tag{4}$$

identisch in $\dot{x}, \dot{y}, x, y, t$ gilt, wenn in $\dot{a}_k$ $(k=1, \cdots, n)$ die zweiten Ableitungen $\ddot{x}, \ddot{y}$ vermöge (1) eliminiert werden. Da aber dann a_k wieder dem Körper $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t)$ angehört, so lieferte (4) eine algebraische Gleichung $(n-1)$ten Grades für f in diesem Körper, wenn nicht alle Coefficienten 0 sind. Da (3) die Gleichung niedrigsten Grades für f ist, so verschwinden also alle $\dot{a}_k$ identisch in $\dot{x}, \dot{y}, x, y, t$. Folglich ist jedes a_k selbst ein algebraisches Integral. Zum Beweise des behaupteten Satzes hat man daher nur zu zeigen, dass jedes dem Körper $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t)$ angehörige Integral eine rationale Funktion der einzigen Variabeln $\dot{x}^2+\dot{y}^2-2V$ ist.

2. Das Integral f sei eine rationale Funktion von $\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1, t$. Man setze

$$f = c\,\frac{g(t)}{h(t)},$$

wo c nicht von t abhängt und $g(t) = t^m + \cdots$, $h(t) = t^n + \cdots$ zwei in bezug auf die Variable t teilerfremde Polynome bedeuten, deren Coefficienten rationale Funktionen von $\dot{x}$, $\dot{y}$, x, y, r, r_1 sind. Die Gleichung

$$\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{h}}{h} = 0 \tag{5}$$

gilt identisch in $\dot{x}$, $\dot{y}$, x, y, t, wenn $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ nach (1) eliminiert werden. Da t in (1) nicht explicit auftritt, so ist $\dot{c}:c$ von t frei und $\dot{g}:g$, $\dot{h}:h$ sind echt gebrochene Funktionen von t mit teilerfremden Nennern. Also verschwindet in (5) jeder einzelne der 3 Brüche, und c, g, h sind einzeln Integrale. Man hat demnach nur die in bezug auf t ganzen Integrale zu bestimmen.

3. Das Integral f habe die Form

$$f = b_0 t^m + \cdots + b_m \qquad (m \geqq 0), \tag{6}$$

wo $b_0, \cdots, b_m$ rationale Funktionen von $\dot{x}$, $\dot{y}$, x, y, r, r_1 sind, von denen b_0 nicht identisch verschwindet. Es soll bewiesen werden, dass $m=0$ ist und folglich t in f nicht explicit auftritt. Dies ergibt sich am einfachsten aus dem Wiederkehrsatz von Poincaré.

Man wähle nämlich für die Constante des Jacobischen Integrales (2) einen solchen Wert γ, dass die Hillsche Curve

$$2V + \gamma = 0$$

in der x, y-Ebene aus 3 Ovalen besteht, von denen 2 je einen der Punkte μ, 0 und $-\mu_1$, 0 enthalten, während das dritte die beiden andern umschliesst. Ferner sei γ noch so bestimmt, dass nicht in allen Punkten des Gebildes

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2V = \gamma \tag{7}$$

eine der Funktionen $b_0, b_1^{-1}, \cdots, b_m^{-1}$ verschwindet. Man kann dann einen Punkt $x=x_0$, $y=y_0$ in einem der beiden ersten Ovale und dazu ein die Gleichung (7) erfüllendes Paar $\dot{x}=\dot{x}_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$ so finden, dass die Funktionen $b_0, b_1^{-1}, \cdots, b_m^{-1}$ für x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ sämtlich von 0 verschieden sind. Andererseits gibt es nach dem Wiederkehrsatz zu jeder beliebig kleinen Umgebung von x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ Bahncurven, die mindestens zweimal in diese Umgebung eintreten, und zwar zu Zeitpunkten, deren Differenz oberhalb einer beliebig grossen Schranke gewählt werden kann. Aus (6) würde aber folgen, dass jene Differenz beschränkt wäre, falls $m>0$ ist.

Es ist vielleicht methodisch unbefriedigend, den analytisch-arithmetischen Wiederkehrsatz heranzuziehen zum Beweise der rein algebraischen Tatsache, dass f von t unabhängig ist. Man kann dies auch algebraisch zeigen, aber, wie es scheint, nur durch compliciertere Schlüsse.

4. Auf grund des Ergebnisses des letzten Paragraphen hat man sich nur noch mit der Aufsuchung derjenigen Integrale zu beschäftigen, welche rationale Funktionen von $\dot{x}$, $\dot{y}$, x, y, r, r_1 allein sind. Es sei $f=g:h$, wo g und h zwei teilerfremde Polynome der beiden Variabeln $\dot{x}$, $\dot{y}$ sind, deren Coefficienten in $\Omega(x, y, r, r_1)$ liegen. Die Gleichung

$$g\dot{h} = h\dot{g} \tag{8}$$

gilt identisch in $\dot{x}$, $\dot{y}$, x, y, wenn daraus $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ vermöge (1) entfernt werden. Nun ist

$$\dot{g} = \dot{x}g_x + \dot{y}g_y + (2\dot{y} + V_x)g_{\dot{x}} + (-2\dot{x} + V_y)g_{\dot{y}} \tag{9}$$

ein Polynom in $\dot{x}$, $\dot{y}$, dessen Grad in diesen Variabeln höchstens um 1 grösser ist als der von g, und dessen Coefficienten zu $\Omega(x, y, r, r_1)$ gehören. Andererseits ist g nach (8) ein Teiler von $\dot{g}$. Daraus folgt identisch in $\dot{x}$, $\dot{y}$, x, y die Gleichung

$$\dot{g} = g(u\dot{x} + v\dot{y} + w), \tag{10}$$

wobei u, v, w in $\Omega(x, y, r, r_1)$ liegen.

Es sei, nach fallenden Potenzen von $\dot{x}$ geordnet,

$$G = a\dot{x}^k\dot{y}^{m-k} + \cdots + b\dot{x}^l\dot{y}^{m-l}$$

das Aggregat der Glieder von g, welche in $\dot{x}$, $\dot{y}$ höchste Dimension haben; und es sei ab nicht identisch 0. Aus (9) und (10) folgt dann

$$u = \frac{a_x}{a}, \qquad v = \frac{b_y}{b}, \tag{11}$$

$$\dot{x}G_x + \dot{y}G_y = \left(\frac{a_x}{a}\dot{x} + \frac{b_y}{b}\dot{y}\right)G. \tag{12}$$

Die ganzen Grössen von $\Omega(x, y, r, r_1)$ haben die Form $c_1+c_2r+c_3r_1+c_4rr_1$, wo c_1, c_2, c_3, c_4 Polynome in x, y bedeuten. Da das Paar g, h nur bis auf einen gemeinsamen Faktor aus $\Omega(x, y, r, r_1)$ bestimmt ist, so kann man voraussetzen, dass a eine der 4 Formen c_1, c_2r, c_3r, c_4rr_1 besitzt, dass ferner die Coefficienten $a, \cdots, b$ von G sämtlich ganz sind und weder r noch r_1 noch ein Polynom in x, y als gemeinsamen Teiler haben. Aus (12) folgt nun aber, dass jedes in $\Omega(x, y)$ irreducible Polynom von x und y, das in a aufgeht, zugleich in allen Coefficienten von G aufgeht, und dasselbe gilt für die Teilbarkeit durch r oder r_1. Also ist a eine Constante. Indem man die Bedeutung von x und y vertauscht, erkennt man, dass auch b constant ist.

Nach (8), (10) und (11) hat man nur noch diejenigen Polynome g der beiden Variabeln $\dot{x}$, $\dot{y}$ mit Coefficienten aus $\Omega(x, y, r, r_1)$ zu ermitteln, welche der Differentialgleichung

$$(13) \qquad\qquad = wg$$

genügen, wobei w in $\Omega(x, y, r, r_1)$ liegt.

5. Es soll nun gezeigt werden, dass die Funktion w in (13) eine Constante ist. Es sei

$$(14) \qquad g = g^{(m)} + g^{(m-1)} + \cdots + g^{(0)},$$

wo $g^{(k)}$ für $k=0, \cdots, m$ ein homogenes Polynom $k$ter Dimension in $\dot{x}$, $\dot{y}$ bedeutet, dessen Coefficienten in $\Omega(x, y, r, r_1)$ liegen; und zwar sei $g^{(m)}$ nicht identisch 0. Aus (9), (13), (14) folgen die Gleichungen

$$(15) \qquad \dot{x} g_x^{(m)} + \dot{y} g_y^{(m)} = 0,$$

$$(16) \qquad \dot{x} g_x^{(m-1)} + \dot{y} g_y^{(m-1)} + 2\dot{y} g_{\dot{x}}^{(m)} - 2\dot{x} g_{\dot{y}}^{(m)} = w g^{(m)},$$

$$(17) \qquad \dot{x} g_x^{(k-1)} + \dot{y} g_y^{(k-1)} + 2\dot{y} g_{\dot{x}}^{(k)} - 2\dot{x} g_{\dot{y}}^{(k)} + V_x g_{\dot{x}}^{(k+1)} + V_y g_{\dot{y}}^{(k+1)} = w g^{(k)}$$
$$(k = 1, \cdots, m-1),$$

$$(18) \qquad V_x g_{\dot{x}}^{(1)} + V_y g_{\dot{y}}^{(1)} = w g^{(0)}.$$

Von diesen besagt (15), dass $g^{(m)}$ eine Funktion der drei Variabeln $\dot{x}$, $\dot{y}$, $x\dot{y}-y\dot{x}$ allein ist. Da aber andererseits $g^{(m)}$ ein Polynom der Variabeln $\dot{x}$, $\dot{y}$ mit Coefficienten aus $\Omega(x, y, r, r_1)$ ist, so ist $g^{(m)}$ ein Polynom in $\dot{x}$, $\dot{y}$, $x\dot{y}-y\dot{x}$.

Es sei $x=\xi$ ein endlicher Pol der Ordnung $h\geqq 1$ von w als Funktion von x. Zunächst sei ξ verschieden von $\mu\pm yi$ und $-\mu_1\pm yi$. Da $g^{(m)}$ ein primitives Polynom in x, y ist, so wird auch $wg^{(m)}$ bei $x=\xi$ von genau $h$ter Ordnung unendlich. Ist $g^{(m-1)}=c(x-\xi)^s+\cdots$ die Entwicklung von $g^{(m-1)}$ nach steigenden Potenzen von $x-\xi$, so ist

$$\dot{x} g_x^{(m-1)} + \dot{y} g_y^{(m-1)} = cs(\dot{x} - \xi_y \dot{y})(x - \xi)^{s-1} + \cdots,$$

und nach (16) erhält man $s-1=-h$, $s\neq 0$. Folglich ist $h>1$, und $g^{(m-1)}$ hat bei $x=\xi$ einen Pol der Ordnung $h-1$. Ist bereits bewiesen, dass $g^{(m-l)}$ bei $x=\xi$ einen Pol der Ordnung $l(h-1)$ hat, so folgt auf dieselbe Weise aus (17), dass $g^{(m-l-1)}$ bei $x=\xi$ einen Pol der Ordnung $(l+1)(h-1)$ hat. Dann würde aber in (18) die rechte Seite bei $x=\xi$ von der Ordnung $m(h-1)$ unendlich werden und die linke Seite höchstens von der Ordnung $(m-1)(h-1)$. Also hat w als Funktion von x keinen von ∞, $\mu\pm yi$, $-\mu_1\pm yi$ verschiedenen Pol.

Hätte w bei $x=\infty$ einen Pol $h$ter Ordnung und ist $g^{(m)}$ in bezug auf x vom $p$ten Grade, so erhielte man ganz analog, dass $g^{(m-l)}$ bei $x=\infty$ einen Pol der Ordnung $l(h+1)+p$ hätte, in Widerspruch zu (18).

Würde ferner w bei $x=\mu\pm yi$ unendlich wie r^{-h}, so folgte im Falle $h>1$, da V_x und V_y nur wie r^{-3} unendlich werden, dass $g^{(m-l)}$ bei $x=\mu\pm yi$ wie $r^{-l(h-2)}$ unendlich wird und dass $h>2$ ist; wieder gegen (18). Ebenso folgt, dass w bei $x=-\mu_1\pm yi$ nicht stärker als r_1^{-1} unendlich werden kann.

Dieselbe Untersuchung kann man für w als Funktion von y durchführen. Es muss daher w die Form

$$w = \frac{c_1}{rr_1} + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{r_1} + c_4$$

haben, wo c_1 höchstens quadratisch in x, y, ferner c_2, c_3 höchstens linear, c_4 constant ist. Nach (16) ist dann $g^{(m-1)}$ eine ganze Funktion in $\Omega(x, y, r, r_1)$, also

$$g^{(m-1)} = b_1 rr_1 + b_2 r + b_3 r_1 + b_4,$$

mit Polynomen b_1, b_2, b_3, b_4 in x, y, und ferner

$$\dot{x}(b_1 rr_1)_x + \dot{y}(b_1 rr_1)_y = \frac{c_1}{rr_1} g^{(m)}, \tag{19}$$

$$\dot{x}(b_2 r)_x + \dot{y}(b_2 r)_y = \frac{c_2}{r} g^{(m)}, \tag{20}$$

$$\dot{x}(b_3 r_1)_x + \dot{y}(b_3 r_1)_y = \frac{c_3}{r_1} g^{(m)}. \tag{21}$$

Führt man statt x, y die Variabeln

$$\alpha = x\dot{y} - y\dot{x}, \qquad \beta = x\dot{x} + y\dot{y}$$

ein, so hängt $g^{(m)}$ nicht von β ab, und vermöge (19) ist

$$(b_1 rr_1)_\beta = \frac{c_1}{rr_1} \cdot \frac{g^{(m)}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \tag{22}$$

Wäre nun b_1 nicht identisch 0, so wird $b_1 rr_1$ als Funktion von β mindestens wie β^2 unendlich, also $(b_1 rr_1)_\beta$ mindestens wie β, während die rechte Seite von (22) beschränkt bleibt. Also ist $b_1=0$, $c_1=0$. Ebenso folgt aus (20) und (21) zunächst, dass b_2 und b_3 constant sind, und dann

$$b_2(\beta - \mu\dot{x}) = c_2 g^{(m)}, \qquad b_3(\beta + \mu_1\dot{x}) = c_3 g^{(m)},$$

also, da $g^{(m)}$ von β frei ist, $c_2=0$, $c_3=0$. Damit ist bewiesen, dass w eine Constante ist.

6. Mit Hilfe des Wiederkehrsatzes lässt sich nun leicht zeigen, dass die Constante $w=0$ ist. Aus (13) folgt nämlich durch Integration

$$g = ce^{wt}, \tag{23}$$

wobei die Constante c von der Bahncurve abhängt. Betrachtet man die Umgebung eines Systemes $x=x_0, y=y_0, \dot{x}=\dot{x}_0, \dot{y}=\dot{y}_0$, in dem g einen endlichen von 0 verschiedenen Wert hat, so gibt es Bahncurven, die nach einem beliebig grossen Zeitintervall nochmals in diese Umgebung eintreten. Wäre nun $w\neq 0$, so würde die rechte Seite von (23) für $t\to\infty$ den Grenzwert 0 oder ∞ haben. Folglich ist $w=0$.

7. Zum Beweise des eingangs ausgesprochenen Satzes hat man nur noch zu zeigen, dass jedes Integral, welches ein Polynom in $\dot{x}$, $\dot{y}$ mit Coefficienten aus $\Omega(x, y, r, r_1)$ ist, sich auf ein Polynom der einzigen Variabeln $\dot{x}^2+\dot{y}^2-2V$ reduciert.

Ist $g=g^{(m)}+\cdots+g^{(0)}$ die Zerlegung des Integrals g in homogene Bestandteile der Dimensionen $m, \cdots, 0$ in $\dot{x}, \dot{y}$, so gelten die Gleichungen (15), (16), (17), (18) mit $w=0$, also

$$\dot{x}g_x^{(m)} + \dot{y}g_y^{(m)} = 0, \tag{24}$$

$$\dot{x}g_x^{(m-1)} + \dot{y}g_y^{(m-1)} + 2\dot{y}g_{\dot{x}}^{(m)} - 2\dot{x}g_{\dot{y}}^{(m)} = 0, \tag{25}$$

$$\dot{x}g_x^{(k-1)} + \dot{y}g_y^{(k-1)} + 2\dot{y}g_{\dot{x}}^{(k)} - 2\dot{x}g_{\dot{y}}^{(k)} + V_xg_{\dot{x}}^{(k+1)} + V_yg_{\dot{y}}^{(k+1)} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, m-1), \tag{26}$$

$$V_xg_{\dot{x}}^{(1)} + V_yg_{\dot{y}}^{(1)} = 0. \tag{27}$$

Man führe wieder statt x, y die Variabeln

$$\alpha = x\dot{y} - y\dot{x}, \qquad \beta = x\dot{x} + y\dot{y}$$

ein. Dann besagt (24), dass

$$g^{(m)} = P(\dot{x}, \dot{y}, \alpha)$$

ein Polynom der 3 Variabeln $\dot{x}$, $\dot{y}$, α allein ist. An die Stelle von (25) tritt

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)g_\beta^{(m-1)} = 2(\dot{x}P_{\dot{y}} - \dot{y}P_{\dot{x}} + \beta P_\alpha),$$

und folglich ist

$$g^{(m-1)} = 2\,\frac{\dot{x}P_{\dot{y}} - \dot{y}P_{\dot{x}}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\beta + \frac{P_\alpha}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\beta^2 + g_1(\dot{x}, \dot{y}, \alpha), \tag{28}$$

wo g_1 nicht von β abhängt. Als Funktion von $\dot{x}$, $\dot{y}$, α, β betrachtet ist daher $g^{(m-1)}$ ein quadratisches Polynom in β.

Nach (26) wird

$$\begin{aligned}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)g^{(k-1)} = \int \Big\{ & 2(\dot{x}g_{\dot{y}}^{(k)} - \dot{y}g_{\dot{x}}^{(k)} + \beta g_\alpha^{(k)} - \alpha g_\beta^{(k)}) \\ & - V_x(g_{\dot{x}}^{(k+1)} + xg_\beta^{(k+1)} - yg_\alpha^{(k+1)}) \\ & - V_y(g_{\dot{y}}^{(k+1)} + xg_\alpha^{(k+1)} + yg_\beta^{(k+1)})\Big\} d\beta,\end{aligned} \tag{29}$$

für $k=1, \cdots, m-1$. Nach (27) gilt dies auch für $k=0$, wenn $g^{(-1)}=0$ definiert wird; und mit $g^{(-2)}=0$ ist die Gleichung trivialerweise noch für $k=-1$ richtig. Für das Folgende genügt es, (29) für $k=m-1$ und $k=m-2$ zu untersuchen. Beachtet man, dass

$$(\dot{x}^2+\dot{y}^2)r^2 = (\alpha-\mu\dot{y})^2+(\beta-\mu\dot{x})^2,$$
$$(\dot{x}^2+\dot{y}^2)r_1^2 = (\alpha+\mu_1\dot{y})^2+(\beta+\mu_1\dot{x})^2$$

ist, so ergibt sich aus (29) für $k=m-1$ durch partielle Integration die Gleichung

$$\begin{aligned} g^{(m-2)} = {} & \frac{yP_{\dot{x}}-(x-\mu)(P_{\dot{y}}+\mu P_\alpha)}{\alpha-\mu\dot{y}}\,\frac{\mu_1}{r} \\ & + \frac{yP_{\dot{x}}-(x+\mu_1)(P_{\dot{y}}+\mu_1 P_\alpha)}{\alpha+\mu_1\dot{y}}\,\frac{\mu}{r_1}+g_2, \end{aligned} \tag{30}$$

wo g_2 als Funktion von $\dot{x}, \dot{y}, \alpha, \beta$ ein biquadratisches Polynom in β ist. Endlich liefert (29) für $k=m-2$ bei Benutzung von (28) und (30) durch eine längere, aber ganz elementare Rechnung für $g^{(m-3)}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (\dot{x}^2+\dot{y}^2)g^{(m-3)} = {} & (\dot{y}P_{\dot{x}}-\dot{x}P_{\dot{y}}-\mu\dot{x}P_\alpha)\int\frac{\mu_1}{r}\,d\beta \\ & + (\dot{y}P_{\dot{x}}-\dot{x}P_{\dot{y}}+\mu_1\dot{x}P_\alpha)\int\frac{\mu}{r_1}\,d\beta+g_3, \end{aligned} \tag{31}$$

wo g_3 in $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1)$ gelegen ist.

8. Setzt man

$$\mu_1(\dot{y}P_{\dot{x}}-\dot{x}P_{\dot{y}}-\mu\dot{x}P_\alpha)=A, \qquad \mu(\dot{y}P_{\dot{x}}-\dot{x}P_{\dot{y}}+\mu_1\dot{x}P_\alpha)=B, \tag{32}$$

so liegt zufolge (31) die Funktion

$$A\int\frac{d\beta}{r}+B\int\frac{d\beta}{r_1} \tag{33}$$

in $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1)$. Indem man β einen Umlauf um den Punkt

$$\beta_0=\mu\dot{x}+i(\alpha-\mu\dot{y}) \neq -\mu_1\dot{x}\pm i(\alpha+\mu_1\dot{y})$$

machen lässt, wobei r sein Vorzeichen ändert, erkennt man, dass auch

$$-A\int\frac{d\beta}{r}+B\int\frac{d\beta}{r_1} \tag{34}$$

zu $\Omega(\dot{x}, \dot{y}, x, y, r, r_1)$ gehört. Andererseits nehmen bei einem Umlauf um den unendlich fernen Punkt die beiden Integrale je um $2\pi i$ zu, während die Funktionen (33) und (34) dabei ungeändert bleiben müssen. Also ist

$$\begin{aligned} A + B &= 0, & -A + B &= 0, \\ A &= 0, & B &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

9. Aus (32) und (35) folgen die beiden Differentialgleichungen

$$\dot{y}P_{\dot{x}} - \dot{x}P_{\dot{y}} = 0, \qquad P_\alpha = 0.$$

Nach der zweiten hängt das Polynom $P(\dot{x}, \dot{y}, \alpha)$ nur von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ ab, nach der ersten sogar nur von $\dot{x}^2+\dot{y}^2$. Als homogenes Polynom in $\dot{x}$, $\dot{y}$ ist daher

$$P = a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^k$$

mit constantem a und natürlichem k. Da nun $a(\dot{x}^2+\dot{y}^2-2V)^k$ ebenfalls ein Integral ist, so ist die Funktion

$$g - a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2V)^k$$

ein Integral, das wieder ein Polynom in $\dot{x}$, $\dot{y}$ mit Coefficienten aus $\Omega(x, y, r, r_1)$ ist, und zwar von kleinerer Dimension in $\dot{x}$, $\dot{y}$ als g selbst.

Durch vollständige Induktion ergibt sich daher, dass g ein Polynom der einzigen Variabeln $\dot{x}^2+\dot{y}^2-2V$ ist. Damit ist der Beweis des zu Anfang ausgesprochenem Satzes beendet.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, N. J.