SUR L'EXISTENCE DE FONCTIONS ENTIÈRES SATISFAISANT À CERTAINES CONDITIONS LINÉAIRES

PAR

G. PÓLYA

1. Le problème. Nous donnons deux suites infinies de nombres complexes

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$
$$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$$

et une suite infinie de nombres entiers non-négatifs

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots .$$

Nous cherchons une fonction entière $F(z)$ qui satisfait aux conditions, en nombre infini,

$$F^{(\alpha_0)}(a_0) = A_0, F^{(\alpha_1)}(a_1) = A_1, \cdots, F^{(\alpha_n)}(a_n) = A_n, \cdots ; \tag{1}$$

on suppose naturellement que la même dérivée de $F(z)$ au même point ne figure qu'une fois dans les conditions (1), supposition qu'on peut mettre sous la forme:

$$\text{si} \quad a_k = a_l \quad \text{et} \quad k < l, \quad \text{alors } \alpha_k < \alpha_l. \tag{2}$$

Existe-t-il une fonction entière $F(z)$ satisfaisant aux conditions (1)?

La fonction entière $F(z)$ existe certainement si

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

et les nombres α_n et A_n sont, excepté (2), arbitraires. C'est un résultat classique(¹).

Très différent du cas classique mentionné est celui où la suite des a_n est *bornée*, tandis que

---

Presented to the Society September 12, 1940; received by the editors July 1, 1940.

(¹) Voir *Guichard*, Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure, (3), Tome 1 (1884), pp. 427–432; énoncé particulier, démonstration (valable dans le cas général!) basée sur les théorèmes classiques de Weierstrass et de Mittag-Leffler. Voir aussi *G. Pólya*, Commentarii Mathematici Helvetici, Tome 11 (1938), pp. 234–252, surtout "Aufgabe 3," p. 245 et "Aufgabe 5," p. 249; énoncé général, démonstration faisant usage d'un système infini d'équations linéaires. (Je saisis l'occasion pour donner deux rectifications à ce travail: 1° En l'écrivant, je n'ai pas connu deux travaux de *M. Eidelheit*, Studia Mathematica, Tome 6 (1936), pp. 139–148 et Tome 7 (1937), pp. 150–154. 2° L'énoncé du Théorème II, p. 241, doit être rectifié: au lieu de la condition B'' (p. 241) on doit supposer la condition plus restreinte, mentionnée sous 3 (p. 241).

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \infty. \tag{3}$$

Pour que la fonction entière $F(z)$ existe dans ce cas-là, il est nécessaire que la suite des A_n satisfasse à la condition

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{A_n}{\alpha_n!} \right|^{1/\alpha_n} = 0; \tag{4}$$

la nécessité de (4) est une conséquence immédiate d'une inégalité classique de Cauchy. Mais la condition (4), jointe aux autres mentionnées, est encore loin d'être suffisante pour l'existence de $F(z)$ (voir §6).

Je ne peux démontrer l'existence de $F(z)$ que dans un cas beaucoup plus restreint que le précédent: les a_n ne sont pas seulement bornés, mais ils sont supposés n'être capables que d'un *nombre fini de valeurs* $c_1, c_2, \cdots, c_q$; je suppose, en outre, une certaine périodicité de période p. Voici l'énoncé complet.

THÉORÈME. *On donne*
un nombre entier p;
q *points différents dans le plan complexe* $c_1, c_2, \cdots, c_q$;
la suite infinie $a_0, a_1, a_2, \cdots$ *dont chaque terme est égal à un certain terme de la suite finie* $c_1, c_2, \cdots, c_q$*—on suppose que*

$$a_{n+p} = a_n \qquad \textit{pour } n = 0, 1, 2, \cdots; \tag{5}$$

la suite infinie d'entiers $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$*—on suppose* (2) *et*

$$\alpha_{n+p} = \alpha_n + p \qquad \textit{pour } n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

$$0 \leqq \alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots. \tag{7}$$

On suppose en outre $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ *choisis de telle façon qu'il n'existe aucun polynôme* $P(z)$ *de degré inférieur à* p *et non identiquement nul qui satisfasse aux* p *équations*

$$P^{(\alpha_0)}(a_0) = 0, P^{(\alpha_1)}(a_1) = 0, \cdots, P^{(\alpha_{p-1})}(a_{p-1}) = 0. \tag{8}$$

On donne enfin la suite infinie $A_0, A_1, A_2, \cdots$; *on suppose* (4).

Sous ces conditions, il existe une fonction entière $F(z)$ *qui satisfait aux conditions* (1).

Les conditions de ce théorème sont un peu complexes; nous les discuterons au §2, et, après certaines préparations aux §§3 et 4, nous démontrerons le théorème au §5.

Notre théorème généralise deux cas particuliers traités par J. M. Whittaker; la démonstration du théorème que je donnerai résulte de l'analyse attentive des démonstrations données par Whittaker et le résultat du théorème constitue une réponse partielle à une question posée par Whittaker[2]. Certaines questions voisines ont été traitées par Poritsky[3] et Gontcharoff[4].

2. **Discussion des conditions.** En vertu des conditions (5) et (6), les équations (1) prennent la forme suivante:

$$
(1') \quad \begin{array}{llll}
F^{(\alpha_0)}(a_0) = A_0, & F^{(\alpha_1)}(a_1) = A_1, & \cdots, & F^{(\alpha_{p-1})}(a_{p-1}) = A_{p-1}, \\
F^{(\alpha_0+p)}(a_0) = A_p, & F^{(\alpha_1+p)}(a_1) = A_{1+p}, & \cdots, & F^{(\alpha_{p-1}+p)}(a_{p-1}) = A_{2p-1}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots, \\
F^{(\alpha_0+mp)}(a_0) = A_{mp}, \cdots, & & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots .
\end{array}
$$

Observons encore que (2) et (7) sont évidemment compatibles et que (6) implique (3).

Quelle est la signification de la condition relative aux équations (8)? $P(z)$ est un polynôme de degré $<p$, donc d'un degré $\leqq p-1$; il peut être mis sous la forme

$$P(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_{p-1} z^{p-1}.$$

(8) constitute un système de p équations, linéaires et homogènes, pour déterminer les p inconnues $u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}$. Notre condition demande que le polynôme identiquement nul soit l'unique solution des équations (8), donc que

$$u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_{p-1} = 0$$

soit l'unique solution du système linéaire et homogène mentionné. Notre condition consiste donc finalement en ceci: *le déterminant Δ du système est* $\neq 0$.

Toutes les lignes du déterminant Δ sont de la forme

$$(9) \qquad 0, \cdots, 0, \alpha!, \frac{(\alpha+1)!}{1!} a, \frac{(\alpha+2)!}{2!} a^2, \cdots, \frac{(p-1)!}{(p-\alpha-1)!} a^{p-\alpha-1}.$$

Le nombre des 0 au commencement de la ligne est α; pour obtenir les lignes successives de Δ, il faut poser $\alpha = \alpha_k$, $a = a_k$ et, après cela, $k = 0, 1, 2, \cdots, p-1$.

En particulier, au commencement des lignes successives de Δ, nous trouvons $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ éléments évanouissants; ces nombres vont en croissant, d'après (7). Puisque $\Delta \neq 0$, nous avons nécessairement

---

(2) *J. M. Whittaker*, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), Tome 36 (1934), pp. 451–469. Voir le Théorème 3 (p. 457), son analogue (p. 458) et le théorème hypothétique formulé au début de la page 465. Voir aussi *J. M. Whittaker, Interpolatory Function Theory*, Cambridge, 1935, p. 51.

(3) *H. Poritsky*, ces Transactions, Tome 34 (1923), pp. 274–331.

(4) *W. Gontcharoff*, Communications de la Société Mathématique de Kharkoff, (4), Tome 5 (1932), pp. 67–85.

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \leqq 1,\ \alpha_2 \leqq 2,\ \cdots,\ \alpha_{p-1} \leqq p-1. \tag{10}$$

Occupons-nous encore brièvement des cas particuliers les plus simples. Si $p=1$, le tableau (1′) se réduit à une seule colonne et, puisque $\alpha_0=0$ en vertu de (10), le problème se réduit à la construction d'une fonction entière dont toutes les dérivées sont données en un point donné—problème qui est sans difficulté. Lorsque

$$p = 2, \qquad a_0 = c_1 \neq a_1 = c_2,$$

le tableau (1′) consiste en 2 colonnes et il n'y a, en vertu de (10), que deux possibilités:

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1.$$

Dans le premier de ces cas, toutes les dérivées d'ordre pair sont données en deux points différents; dans le second cas, on donne dans un point toutes les dérivées d'ordre pair et dans un second point, différent du premier, toutes les dérivées d'ordre impair. Voilà les deux cas dans lesquels Whittaker a démontré l'existence de la fonction entière $F(z)$.

Voici deux cas pour p quelconque, dans lesquels Δ ne s'annulle pas:

(I) $\alpha_0=\alpha_1= \cdots =\alpha_{p-1}=0$, les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ sont distincts, Δ se réduit à un déterminant de Vandermonde;

(II) $\alpha_0=0, \alpha_1=1, \cdots, \alpha_{p-1}=p-1$, les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ sont quelconques, Δ se réduit au produit de ses éléments diagonaux.

Le cas (I) a été envisagé par Poritsky et le cas (II) par Gontcharoff; ces deux auteurs ont eu un but différent, ils ne se sont pas occupés du problème d'existence qui nous intéresse ici, mais d'un certain problème de convergence[5]; toutefois quelques-unes des formules qu'ils ont développées peuvent servir de point de départ pour les formules plus générales que nous allons développer.

3. **Accès heuristique.** Les conditions (1) constituent une sorte d'extension à l'infini du problème classique qui est résolu par la formule d'interpolation de Lagrange. Faisons subir à cette formule l'extension analogue; nous arrivons à la formule

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(\alpha_n)}(a_n)P_n(z) \tag{11}$$

où $P_n(z)$ est un certain polynôme dont la nature dépend des deux suites $a_0, a_1, \cdots$ et $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$. Appliquons (11) à la fonction entière simple

$$F(z) = e^{zs}$$

[5] Il s'agit de la convergence de la série (11), dans les cas particuliers respectifs; voir loc. cit. [3] et [4]. Whittaker s'est aussi occupé de la convergence de cette série dans les deux cas particuliers qu'il a envisagés, loc. cit. [2]. L'étude de la convergence de la série (11) générale fera partie d'une Thèse que S. Schmidli prépare à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich.

qui dépend du paramètre complexe s; nous arrivons à la formule

$$e^{zs} = \sum_{n=0}^{\infty} s^{\alpha_n} e^{a_n s} P_n(z)$$

que nous écrirons, en tenant compte des conditions (5) et (6), ainsi ($n = pm + k$, passage de (1) à (1′)):

$$\begin{aligned} e^{zs} &= \sum_{k=0}^{p-1} s^{\alpha_k} e^{a_k s} \sum_{m=0}^{\infty} s^{pm} P_{pm+k}(z) \\ &= s^{\alpha_0} e^{a_0 s} L_0 + s^{\alpha_1} e^{a_1 s} L_1 + \cdots + s^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} s} L_{p-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Nous avons posé pour abréger

$$L_k = L_k(z, s) = \sum_{m=0}^{\infty} s^{pm} P_{pm+k}(z), \tag{13}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots, p-1$. Observons qu'en posant

$$e^{2\pi i/p} = \omega \tag{14}$$

nous avons

$$L(z, \omega s) = L(z, s). \tag{15}$$

Par application réitérée de (15) à (12) nous arrivons à un système de p équations linéaires pour les p fonctions $L_0, L_1, \cdots, L_{p-1}$:

$$\begin{aligned} e^{zs} &= s^{\alpha_0} e^{a_0 s} L_0 + \cdots + s^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} s} L_{p-1}, \\ e^{z\omega s} &= (\omega s)^{\alpha_0} e^{a_0 \omega s} L_0 + \cdots + (\omega s)^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} \omega s} L_{p-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ e^{z\omega^{p-1} s} &= (\omega^{p-1} s)^{\alpha_0} e^{a_0 \omega^{p-1} s} L_0 + \cdots + (\omega^{p-1} s)^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} \omega^{p-1} s} L_{p-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

4. **Définition et propriétés de quelques fonctions auxiliaires.** Effectivement le développement (11) ne joue aucun rôle dans la démonstration qui suit; il nous a donné seulement l'occasion d'introduire les éléments analytiques qui y jouent un rôle. Nous allons définir certaines fonctions auxiliaires qui nous seront utiles, en suivant les suggestions du no. précédent, mais officiellement, nous n'utiliserons aucunement les calculs qui y étaient basés sur le développement (hypothétique!) (11).

I. Nous définissons $D(s)$ par l'équation

$$D(s) = \begin{vmatrix} s^{\alpha_0} e^{a_0 s} & s^{\alpha_1} e^{a_1 s} & \cdots & s^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} s} \\ (\omega s)^{\alpha_0} e^{a_0 \omega s} & (\omega s)^{\alpha_1} e^{a_1 \omega s} & \cdots & (\omega s)^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} \omega s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (\omega^{p-1} s)^{\alpha_0} e^{a_0 \omega^{p-1} s} & (\omega^{p-1} s)^{\alpha_1} e^{a_1 \omega^{p-1} s} & \cdots & (\omega^{p-1} s)^{\alpha_{p-1}} e^{a_{p-1} \omega^{p-1} s} \end{vmatrix} \tag{17}$$

(c'est le déterminant des équations (16)). Le déterminant (17) est de la forme

$$\text{(18)} \qquad \delta(s) = \begin{vmatrix} f_0(\lambda_0 s) & f_1(\lambda_0 s) & \cdots & f_{p-1}(\lambda_0 s) \\ f_0(\lambda_1 s) & f_1(\lambda_1 s) & \cdots & f_{p-1}(\lambda_1 s) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_0(\lambda_{p-1} s) & f_1(\lambda_{p-1} s) & \cdots & f_{p-1}(\lambda_{p-1} s) \end{vmatrix};$$

$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ sont des constantes, $f_0(s), f_1(s), \cdots, f_{p-1}(s)$ des fonctions que nous supposons développables en série de Maclaurin. Le déterminant (18) est "composé" de deux rectangles à p lignes et à une infinité de colonnes:

$$\begin{Vmatrix} f_0(0), & f_0'(0), & f_0''(0), & \cdots, f_0^{(n)}(0), & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot & \cdots \\ f_{p-1}(0), & f_{p-1}'(0), & f_{p-1}''(0), & \cdots, f_{p-1}^{(n)}(0), & \cdots \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1, & \dfrac{\lambda_0 s}{1!}, & \dfrac{\lambda_0^2 s^2}{2!}, & \cdots, \dfrac{\lambda_0^n s^n}{n!}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot & \cdots \\ 1, & \dfrac{\lambda_{p-1} s}{1!}, & \dfrac{\lambda_{p-1}^2 s^2}{2!}, & \cdots, \dfrac{\lambda_{p-1}^n s^n}{n!}, & \cdots \end{Vmatrix}$$

(il est, comme on dit quelquefois, le "produit" de ces deux rectangles). Le déterminant (18) est égal à une somme d'une infinité de termes, chacun étant le produit de deux facteurs; le premier facteur est un déterminant à p lignes, tiré du premier rectangle, le second facteur est le déterminant correspondant tiré du second rectangle. Cherchons parmi tous ces termes celui qui est de degré minimum en s; nous n'écrirons que ce terme (légèrement transformé) pour suggérer tout le développement:

$$\text{(19)} \qquad \begin{aligned} \delta(s) = {} & \begin{vmatrix} f_0(0) & f_0'(0) & \cdots & f_0^{(p-1)}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{p-1}(0) & f_{p-1}'(0) & \cdots & f_{p-1}^{(p-1)}(0) \end{vmatrix} \\ & \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \lambda_{p-1} & \cdots & \lambda_{p-1}^{p-1} \end{vmatrix} \frac{s^{1+2+\cdots+p-1}}{1!2!\cdots(p-1)!} + \cdots. \end{aligned}$$

$D(s)$ est un cas particulier de $\delta(s)$. Pour obtenir ce cas particulier, il faut d'abord poser

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1 = \omega, \cdots, \lambda_{p-1} = \omega^{p-1}.$$

Parmi ces p nombres il n'y a pas deux égaux, donc le second déterminant dans le second membre de (19), le Vandermondien de ces p nombres, est $\neq 0$. Puis il faut poser

$$f_0(s) = s^{\alpha_0}e^{a_0 s}, \ f_1(s) = s^{\alpha_1}e^{a_1 s}, \cdots, f_{p-1}(s) = s^{\alpha_{p-1}}e^{a_{p-1}s}.$$

Le développement

$$s^\alpha e^{as} = \alpha!\frac{s^\alpha}{\alpha!} + \frac{(\alpha+1)!}{1!}a\frac{s^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} + \frac{(\alpha+2)!}{2!}a^2\frac{s^{\alpha+2}}{(\alpha+2)!} + \cdots$$

montre que la ligne générale du premier déterminant dans le second membre de (19) a exactement la forme (9); il faut poser

$$\alpha = \alpha_k, \qquad a = a_k$$

et, après cela, $k=0, 1, 2, \cdots, p-1$; le déterminant est donc identique à Δ et, par conséquent, $\neq 0$, voir §2. Notons le résultat:

La fonction entière $D(s)$ pour laquelle le point $s=0$ est un zéro dont l'ordre est exactement $\frac{1}{2}p(p-1)$, n'est pas identiquement nulle.

II. Nous définissons $L_0, L_1, \cdots, L_{p-1}$ par les équations (16). Nous venons de voir que $D(s)$, le déterminant de ces équations, n'est pas identiquement nul; donc

$$L_k = L_k(z, s), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, p-1,$$

est bien défini, sauf aux zéros de $D(s)$. Or L_k est le quotient de deux déterminants; cette expression montre que $L_k(z, s)$ est une *fonction entière de z* (dépendant du paramètre s) et une *fonction méromorphe de s* (dépendant du paramètre z); les pôles de $L_k(z, s)$ (comme fonction de s) se trouvent parmi les zéros de $D(s)$.

Pour la commodité de l'écriture, nous posons

$$\frac{\partial^n L(z, s)}{\partial z^n} = L^{(n)}(z, s).$$

Dérivons l'équation générale du système (16) c.à.d.

$$e^{z\omega^k s} = \sum_{j=0}^{p-1} (\omega^k s)^{\alpha_j} e^{a_j \omega^k s} L_j(z, s)$$

$\alpha_l + pm$ fois par rapport à z et, après cela, posons $z = a_l$. Nous obtenons

$$(\omega^k s)^{\alpha_l} e^{a_l \omega^k s} s^{pm} = \sum_{j=0}^{p-1} (\omega^k s)^{\alpha_j} e^{a_j \omega^k s} L_j^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s) \tag{20}$$

pour $k=0, 1, \cdots, p-1$. C'est un système de p équations aux p inconnues

$$L_0^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s), \ L_1^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s), \cdots, L_{p-1}^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s)$$

dont le déterminant est $D(s)$; mais $D(s)$ n'est pas identiquement $=0$; donc les inconnues, comme fonctions méromorphes de s, sont univoquement déterminées. D'autre part on voit immédiatement que les valeurs

$$L_l^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s) = s^{pm}, \qquad L_j^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s) = 0, \qquad j \neq l, \tag{21}$$

satisfont au système (20). Nous avons ainsi obtenu les relations remarquables (21), valables pour $j, l=0, 1, \cdots, p-1$ et $m=0, 1, 2, \cdots$ (6).

III. Nous pouvons décomposer notre problème, qui est de satisfaire aux équations (1′), en p problèmes un peu plus simples. En effet, fixons k, $0 \leqq k \leqq p-1$, et cherchons une fonction entière $F_k(z)$ qui satisfait aux équations suivantes:

$$F_k^{(\alpha_k+pm)}(a_k) = A_{k+pm}, \qquad F_k^{(\alpha_j+pm)}(a_j) = 0, \qquad j \neq k, \tag{22}$$

$m=0, 1, 2, \cdots$. (Cela revient à laisser les seconds membres tels qu'ils sont dans une certaine colonne du tableau (1′) et à les remplacer par 0 dans les $p-1$ autres colonnes.) Ayant trouvé $F_0(z), F_1(z), \cdots, F_{p-1}(z)$,

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z) + \cdots + F_{p-1}(z)$$

sera évidemment une solution du système (1′).

5. **Fin de la démonstration.** Nous ne perdons rien d'essentiel en nous limitant à la démonstration de l'existence de $F_0(z)$. Simplifions l'écriture et écrivons

$$F(z), \qquad L(z), \qquad a, \qquad 0$$

à la place de

$$F_0(z), \qquad L_0(z), \qquad a_0, \qquad \alpha_0$$

(on sait, d'après (10), que $\alpha_0=0$). Avec ces notations, nous avons

$$F^{(pm)}(a) = A_{pm}, \qquad F^{(\alpha_l+pm)}(a_l) = 0, \tag{23}$$

$$L^{(pm)}(a, s) = s^{pm}, \qquad L^{(\alpha_l+pm)}(a_l, s) = 0 \tag{24}$$

pour $m=0, 1, 2, \cdots$ et $l=1, 2, \cdots, p-1$. Observons que c'est seulement une partie des relations (21), p relations sur p^2, que nous venons d'écrire sous la forme (24). Observons encore qu'en vertu de (6) et de (10)

$$\alpha_{pn} = \alpha_0 + pn = pn. \tag{25}$$

Soit C_n une circonférence de centre $s=0$ qui ne passe par aucun des zéros

(6) On établit de la même manière, en se servant de l'unicité de la solution, la propriété (15). Encore d'autres propriétés de $D(s)$ et de $L(z, s)$ jouent un rôle dans le problème de convergence mentionné (5). P.e. il est facile de démontrer que $D(s)$ a une infinité de racines si $\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{p-1}<0+1+\cdots+p-1$.

de $D(s)$, donc par aucun pôle de $L(z, s)$. Nous allons trouver une solution $F(z)$ des équations (23) qui est de la forme[7]

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{pn}}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{L(z, s)ds}{s^{pn+1}}. \tag{26}$$

I. Nous admettons d'abord que la série (26) converge uniformement en chaque domaine borné du plan des z.

Alors $F(z)$, donnée par (26), est une fonction entière de z puisque chaque terme de la série est une fonction entière de z.

Puis nous trouvons, en nous servant de (24)

$$F^{(pm)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{pn}}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{s^{pm}ds}{s^{pn+1}} = A_{pm},$$

$$F^{(\alpha_l+pm)}(a_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{pn}}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{0ds}{s^{pn+1}} = 0, \qquad l > 0.$$

c.à.d. les équations (23) sont satisfaites.

II. Que devons-nous démontrer encore? La convergence uniforme de la série (26) pour

$$|z| \leqq R \tag{27}$$

où R est un nombre positif donné (arbitrairement grand). De quoi pouvons-nous disposer encore? Des cercles C_n.

Je désignerai dans ce qui suit par $k_1, k_2, \cdots, K, k$ des nombres positifs qui dépendent des données du problème (de $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$) ainsi que de R, mais qui sont indépendants de s et de n. La définition (17) de $D(s)$ montre qu'il existe k_1 et k_2 tels que pour tout s

$$|D(s)| < k_1 e^{k_2|s|}.$$

Vu cette inégalité, nous pouvons, d'après un théorème de Valiron[8], choisir r_n tel que

$$pn < r_n < 2pn \tag{28}$$

et que, en chaque point s du cercle $|s| = r_n$,

---

[7] En cherchant une solution de la forme (26), je me sers d'une méthode que *Hurwitz* a employée pour un but différent; voir Acta Mathematica, Tome 20 (1897), pp. 285–312 ou *Mathematische Werke*, Basel, 1932, Tome 1, pp. 436–460. Dans une Thèse, faite sous ma direction, *H. Muggli* a appliqué la méthode de Hurwitz à des problèmes assez généraux; voir Commentarii Mathematici Helvetici, Tome 11 (1938), pp. 151–179.

[8] *G. Valiron, Integral Functions*, Toulouse, 1923; voir le Théorème 27, p. 89. Dans la Thèse citée [7], la généralité des applications résulte également de l'usage de ce théorème de Valiron.

$$(29) \qquad | D(s) | > \frac{1}{k_3 e^{k_4|s|}},$$

cette inégalité étant valable pour $n=1, 2, 3, \cdots$. *Soit r_n le rayon de C_n*; donc (29) est valable sur le cercle C_n.

$L(z, s)$ est un quotient des deux déterminants, d'après (16). La forme du numérateur montre que, z étant un point quelconque du cercle (27), on a pour tout s

$$| D(s)L(s, z) | < k_5 e^{k_6|s|};$$

en combinant cette inégalité avec (29) on obtient

$$(30) \qquad | L(z, s) | < k_5 e^{k_6|s|} \cdot k_3 e^{k_4|s|} = K e^{k|s|}$$

sur tous les cercles C_n, $n=1, 2, 3, \cdots$.

A l'aide de (28) et de (30) nous évaluons le module du terme général de la série (26) dans le cercle (27):

$$(31) \qquad \begin{aligned} \left| \frac{A_{pn}}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{L(z, s)ds}{s^{pn+1}} \right| &< \frac{| A_{pn} |}{2\pi} \frac{K e^{kr_n} 2\pi r_n}{r_n^{pn+1}} \\ &< | A_{pn} | K \frac{e^{k2pn}}{(pn)^{pn}} \leqq \frac{| A_{pn} |}{(pn)!} K e^{k2pn}. \end{aligned}$$

La n-ième racine de cette dernière quantité tend, en vertu de l'hypothèse (4), vers 0 avec $1/n$; il faut tenir compte de (25). Donc, la série (26) possède dans le cercle (27) une majorante numérique convergente. C.q.f.d.

6. Problèmes de la même forme, qui ne possèdent pas de solution. Nous considérons le problème de trouver une fonction entière qui satisfait à (1). Nous admettons les hypothèses (2), (3), (4) et en outre la suivante (qui figure aussi dans le théorème que nous venons de démontrer): Chaque terme de la suite infinie $a_0, a_1, a_2, \cdots$ est égal à un certain terme d'une suite finie donnée. Ces hypothèses sont insuffisantes pour assurer l'existence de la solution comme les exemples suivants le montrent.

1*er exemple.* La suite finie contient trois valeurs différentes c, 0, $-c$. Les trois suites infinies sont définies ainsi:

$$\begin{aligned} a_n &= c, \quad -c; \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \cdots; \\ \alpha_n &= 0, \quad 0; \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \cdots; \\ A_n &= 0, \quad 1; \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \cdots. \end{aligned}$$

La loi des conditions successives est uniforme à partir de la 3me condition (après le signe ;) et, d'après cette partie des conditions, $F(z)$ devrait être une fonction paire—mais cela contredit les deux premières conditions; $F(z)$ n'existe pas.

Cet exemple est plutôt trivial, mais montre clairement ce qu'il doit montrer: l'insuffisance des hypothèses énoncées pour assurer l'existence de la solution. L'exemple suivant est moins trivial.

2me exemple. La suite finie ne contient que deux termes différents: a et b. Les trois suites infinies sont définies ainsi:

$$\begin{array}{llllllllllll} a_n = a, & b; & a, & b, & a, & a, & b; & a, & b, & a, & a, & b; \cdots ; \\ \alpha_n = 0, & 0; & 1, & 1, & 2, & 3, & 3; & 5, & 5, & 6, & 7, & 7; \cdots ; \\ A_n = 0, & 1; & 0, & 0, & 0, & 0, & 0; & 0, & 0, & 0, & 0, & 0; \cdots . \end{array}$$

La loi des conditions successives est uniforme à partir de la 3me condition (après le premier signe ;). On a pour $n \geqq 3$

$$a_{n+5} = a_n, \qquad \alpha_{n+5} = \alpha_n + 4, \qquad A_n = 0.$$

D'après cette partie des conditions, $F(z)$ devrait être paire relativement aux deux points a et b et avoir une symétrie encore plus haute relativement au point a; plus précisément, $F(z)$ devrait satisfaire aux identiés par rapport à z:

$$F(z) = F(a + i(z - a)), \qquad F(z) = F(b - (z - b)).$$

De ces identités on tire, par calcul formel ou en tenant compte de la signification géométrique:

$$F(z + 2(b - a)) = F(z), \qquad F(z + 2i(b - a)) = F(z).$$

$F(z)$ serait ainsi une fonction entière doublement périodique, donc une constante—mais cela contredit les deux premières conditions; $F(z)$ n'existe pas.

École Polytechnique Fédérale,
Zurich, Suisse,
Brown University,
Providence, R. I.