INTEGRATION D'UNE FORME DIFFERENTIELLE LE LONG DE CERTAINES COURBES NON RECTIFIABLES

BY

GEORGES GLAESER

I. **Position du problème.** Soit Γ un arc de Jordan simple (i.e. un espace topologique homéomorphe à un segment compact) tracé dans R^2.

Considérons une forme différentielle $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ définie en chaque point M (de coordonnées x et y) de la courbe.

PROBLÈME A. Trouver une fonction différentiable $f(x, y)$ définie dans R^2 et telle qu'en chaque point $M \in \Gamma$ on ait les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y). \tag{1}$$

L'existence d'une telle fonction n'est assurée que moyennant des conditions convenables portant, soit sur les fonctions P et Q, soit sur la courbe Γ. (Signalons qu'un tel problème est traité par M. Denjoy [1].)

Il est naturel de soumettre les fonctions P et Q à des conditions de dérivabilités: Pour formuler de telles conditions il convient de donner un sens précis à la notion de "fonction m-fois continûment dérivable définie sur un ensemble fermé quelconque de R^2." Une telle notion a été introduite par H. Whitney [1]: Nous étudions cette notion dans notre thèse (cf. Glaeser [1]) sous le nom de *champ W-taylorien d'ordre m* (on pourra aussi se reporter au résumé [2]).

Rappelons qu'un *champ taylorien* d'ordre m défini sur Γ est une application de Γ dans l'espace des polynômes à deux indéterminées x et y, de degré total $\leqq m$. La valeur d'un tel champ $\dot{P}$ en un point $A \in \Gamma$ sera notée $T_A\dot{P}$ et s'appelera "le polynôme de Taylor" au point A du champ $\dot{P}$. Les coefficients de ce polynôme s'appellent les "*dérivées partielles*" du champ taylorien.

Etant donnée une fonction $f(x, y)$ m-fois continûment dérivable définie sur R^2, on peut lui faire correspondre un champ taylorien d'ordre m, défini sur Γ, et prenant pour valeur en tout point A le polynôme de Taylor au point A (au sens classique) de la fonction f.

Le *théorème du prolongement de Whitney* caractérise les champs tayloriens qui peuvent être ainsi "induits" sur Γ par une fonction m-fois continûment dérivable. Les champs tayloriens que l'on peut ainsi prolonger à R^2 s'appellent des "champs W-tayloriens d'ordre m." La condition nécéssaire et suffisante pour qu'un champ taylorien d'ordre m soit W-taylorien est qu'il satisfasse

Received by the editors June 15, 1958.

à un certain système d'inégalités (les *inégalités W*) qui expriment des majorations pour les restes des formules de Taylor de chacune des dérivées du champ(1).

PROBLÈME B. Considérons une "forme différentielle" $\dot{\omega}=\dot{P}(x,y)dx+\dot{Q}(x, y)dy$ où $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ sont des champs W-tayloriens d'odre m définis sur Γ. Trouver une fonction $f(x, y)$ $m+1$ fois continûment dérivable définie sur R^2, telle que les fonctions m-fois continûment dérivables $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ induisent sur Γ les champs W-tayloriens $\dot{P}$ et $\dot{Q}$.

DÉFINITION. On dit que la forme $\dot{\omega}$ est *fermée* au point A (de coordonnées x_0 et y_0) si les relations suivantes sont satisfaites:

$$\frac{\partial^{p+q+1}\dot{P}}{\partial x^p\partial y^{q+1}}(x_0, y_0) = \frac{\partial^{p+q+1}\dot{Q}}{\partial x^{p+1}\partial y^q}(x_0, y_0) \qquad \text{pour } p+q+1 \leqq m. \tag{2}$$

Pour que le Problème B admette des solutions il est *nécéssaire* que la forme $\dot{\omega}$ soit fermée en chaque point de Γ.

Réciproquement il existe des courbes particulières pour lesquelles cette condition est aussi suffisante:

(a) M. Sion [1] a montré que c'est le cas pour certaines courbes construites par H. Whitney [2] (pour m assez grand).

(b) Nous montrons au §VI du présent article qu'il en est ainsi pour la courbe de von Koch, dès que $m\geqq 1$.

(c) On trouvera au §VII ci-dessous un exemple de courbe pour laquelle le Problème B n'est en général pas possible (pour une forme fermée $\dot{\omega}$).

Entre le problème A, qui se contente d'un accord entre les dérivées premières de f et les fonctions P et Q, et le Problème B qui exige la concordance de *toutes* les dérivées partielles de f (jusqu'à l'ordre $m+1$) avec les dérivées correspondantes de $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ se situe un problème intermédiaire:

PROBLEME C. On considére une "forme différientielle" $\dot{\omega}=\dot{P}(x, y)dx+\dot{Q}(x, y)dy$ où $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ sont des champs W-tayloriens *d'ordre r*. Trouver une fonction $f(x, y)m+1$ fois continûment dérivable (où $m<r$) telle qu'en chaque point de Γ les relations suivantes soient satisfaites:

$$\frac{\partial^{p+q+1}f}{\partial x^{p+1}\partial y^q} = \frac{\partial^{p+q}P}{\partial x^p\partial y^q}, \qquad \frac{\partial^{p+q+1}f}{\partial x^p\partial y^{q+1}} = \frac{\partial^{p+q}Q}{\partial x^p\partial y^q} \qquad (p+q+1<m). \tag{3}$$

Nous traitons au §V le cas où Γ est le graphe d'une fonction continue. Nous montrons que le Problème C admet alors une solution pour $r=m+1$. Mais

(1) Soit $\dot{P}$ un champ taylorien d'ordre m. La première inégalité W s'écrit $|\dot{P}(M)-T_A\dot{P}(M)| \leqq \|AM\|^m\alpha(\|AM\|)$. Chacune des dérivées partielles de $\dot{P}$ (d'ordre total k) définit d'une façon évidente un champ taylorien d'ordre $m-k$.

Le système complet des inégalités (W) s'obtient en écrivant pour chacune des dérivées partielles une inégalité analogue à la précédente.

Naturellement il convient de faire intervenir, au lieu de $T_A\dot{P}$ le polynôme de Taylor de degré $m-k$ de la dérivée partielle, et de substituer $m-k$ à m au second membre. Un module de continuité α susceptible de convenir à toutes ces inégalités s'appelle un *m-module de continuité* du champ taylorien.

le contre-exemple du §VII montre que l'on ne peut pas en général réaliser l'accord entre les dérivées partielles d'ordre total $r+1$ de la fonction f et les dérivées partielles d'ordre total r de la forme $\dot{\omega}$.

AUTRE FORMULATION. Soit $\dot{\omega}=\dot{P}(x, y)dx+\dot{Q}(x, y)dy$ une forme différentielle *fermée* sur Γ. $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ sont des champs W-tayloriens d'ordre r. D'après le théorème du prolongement de Whitney, on peut prolonger $\dot{\omega}$ en une forme différentielle $\hat{\omega}=\hat{P}(x, y)dx+\hat{Q}(x, y)dy$, où $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ sont des *fonctions* r-fois continûment dérivables définies sur un pavé compact K contenant Γ.

Le Problème B revient à chercher une forme $\hat{\omega}$ *fermée* en tout point de K prolongeant la forme $\dot{\omega}$.

Comme ce problème n'admet pas toujours de solution, le Problème C consent à limiter ses exigences sur l'ordre de dérivabilité de $\hat{\omega}$, (qui passe de r à $m<r$) tout en maintenant la condition de fermeture pour le prolongement.

II. **Principe de la méthode d'intégration.** On peut toujours inscrire dans Γ une suite de lignes polygonales *sans points doubles* tendant vers Γ (cf. par exemple Jordan [1]).

Un arc de Jordan admettant par définition une représentation paramétrique propre, on supposera que les sommets successifs d'une même ligne polygonale correspondent à des valeurs croissantes du paramètre. Appelons $F_1, F_2, \cdots, F_i, \cdots$ les ensembles finis formés par les sommets de ces lignes polygonales. On les prendra de façon que $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_i$. Sur chacun des ensembles F_i nous construisons un champ W-taylorien d'ordre $r+1$ que nous appelerons $\dot{f}_i$ et tel que $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ induisent sur F_i les champs W-tayloriens $\partial\dot{f}/\partial x^i$ et $\partial\dot{f}/\partial y^i$.

Ces champs $\dot{f}_i$ seront construits de façon qu'ils satisfassent aux deux conditions suivantes:

(4) (a) Les $\dot{f}_i$ admettent *un même m-module de continuité* $\alpha(x)$.

(b) Il existe une constante C indépendante de i telle que

$$|||f_i|||_{F_i}^m \leqq C.$$

(Pour la définition du m-module de continuité, et de la norme $|||\ |||_{F_i}^m$ cf. Glaeser [2], ou Glaeser [1, Chapitre I et III].)

(L'entier m qui figure dans les inégalités (4) est l'entier $m<r$ dont il est question dans l'énoncé du Problème C.)

Les $\dot{f}_i$ sont définis sur des fermés F_i *distincts*. Mais le Théorème I du Chapitre III (de Glaeser [1]) permet d'affirmer que ces $\dot{f}_i$ admettent des prolongements $\hat{f}(x, y)$ qui sont des fonctions m fois continûment dérivables définies sur le pavé compact K et satisfaisant aux inégalités suivantes:

(5) (a) Les fonctions $\hat{f}_i(x, y)$ admettent un m-module de continuité commun $\Gamma_2 \times \alpha(x)$.

(b) L'ensemble des $\|\hat{f}_i\|_K^m$ est borné: on a $\|\hat{f}_i\|_K^m \leqq C \cdot \Gamma_1$.

D'après le théorème d'Ascoli les $\hat{f}_i$ constituent un ensemble relativement compact de $\mathfrak{D}^m(K)$. On peut donc extraire de la suite des $\dot{f}_i$ une sous-suite, convergente au sens de $\mathfrak{D}^m(K)$ vers une fonction $f(x, y)$ m-fois continûment dérivable sur K.

Mais, par construction, les dérivées partielles d'ordre $\leqq r$ (et a fortiori d'ordre $\leqq m+1$) des $\dot{f}_i$ convergent *simplement* vers les dérivées partielles de $\dot{P}$ et $\dot{Q}$ sur la réunion des ensembles F_i, qui est dense dans Γ.

En appliquant de nouveau le théorème d'Ascoli, on en conclut que les dérivées partielles d'ordre total $\leqq m+1$ des $\dot{f}_i$ convergent uniformément sur Γ vers les dérivées correspondantes de $\dot{P}$ et $\dot{Q}$. La fonction $f(x, y)$ est donc une solution du problème C posé.

Il ne reste qu'à montrer comment l'on peut satisfaire aux conditions (4).

III. **Intégration d'une forme differéntielle le long d'un segment de droite.**

PROPOSITION I. *Soit* $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *une forme différentielle définie dans* R^2, *où* P *et* Q *sont des fonctions* r-*fois continûment dérivables. On peut trouver une fonction* $f(x, y)$ $r+1$ *fois continûment dérivable telle qu'en chaque point d'un segment de droite* AB *on ait*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

La restriction de f *au segment* AB *n'est définie qu'à une constante additive près.*

Si $\alpha(x)$ *est un* r-*module de continuité commun à* P *et* Q *la fonction* f *admet un* $(r+1)$-*module de continuité égal à* $\Gamma_2 \cdot \alpha(x)$. (Γ_2 *est la constante qui intervient dans Glaeser* [2], *ou* [1, *Chapitre* I].) *De plus, en chaque point de* AB *où la forme* ω *est fermée les fonctions* $\partial f/\partial x$ *et* P (*resp* $\partial f/\partial y$ *et* Q) *admettent le même polynôme de Taylor.*

En effet, grâce à un changement de système de coordonnées, on peut se ramener au cas où le segment AB coïncide avec un segment OI de l'axe Ox.

Nous allons définir un champ taylorien d'ordre $r+1$ sur OI, en posant

$$\dot{f}(x, 0) = \int_0^x P(t, 0)dt + \dot{f}(0, 0) \qquad (\dot{f}(0, 0) \text{ est une constante d'integration}),$$

$$\frac{\partial^{p+1}\dot{f}}{\partial x^{p+1}}(x, 0) = \frac{\partial^p P}{\partial x^p}(x, 0) \qquad \text{pour } p \leqq r, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^{p+q+1}\dot{f}}{\partial x^p \partial y^{q+1}}(x, 0) = \frac{\partial^{p+q} Q}{\partial x^p \partial y^q}(x, 0) \qquad \text{pour } p + q \leqq r.$$

Il faut vérifier que le champ taylorien ainsi défini est bien un champ W-taylorien d'ordre $r+1$.

Vérifions les inégalités W (cf. Glaeser [1, Chapitre 1, §11]). La première inégalité de Whitney concerne une majoration de l'expression $|\dot{f}(M) - T_N\dot{f}(M)|$ où M (resp N) est un point de OI de coordonnées x et 0 (resp x' et 0).

Il s'agit ici de majorer le module de

$$\int_x^{x'} P(t, 0)dt - \sum_{k=1}^{k=r} \frac{(x-x')^k}{k!} \frac{\partial^k P}{\partial x^k}(x', 0).$$

Or cette expression n'est autre que le reste de la formule de Taylor de la fonction $r+1$ fois continûment dérivable de la seule variable x: $\int_x^{x'} P(t, 0)dt$.

On obtient

$$|f(M) - T_N f(M)| \leqq \frac{\|NM\|^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \alpha(\|NM\|).$$

D'après la Proposition I du Chapitre I de Glaeser [1], on peut prendre α égal à n'importe quel module de continuité de la fonction d'une variable $(\partial^r P/\partial x^r)(x, 0)$.

Les autres inégalités (W) sont des majorations analogues portant sur les dérivées partielles de $\dot{f}$. Elles ne font qu'exprimer que les fonctions

$$\frac{\partial^p P}{\partial x^p}(x, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{p+q} Q}{\partial x^p \partial y^q}(x, 0)$$

sont respectivement $r-p$ et $r-p-q$ fois continûment dérivables.

$\dot{f}$ est bien un champ W-taylorien d'ordre $r+1$ qui admet un $r+1$ module de continuité égal à tout r-module de continuité commun à $P(x, y)$ et $Q(x, y)$: soit $\alpha(x)$.

Ce champ se laisse prolonger en une fonction $f(x, y)$ $r+1$ fois continûment dérivable satisfaisant aux conditions de l'énoncé: elle admet un $r+1$ module de continuité égal à $\Gamma_2 \cdot \alpha(x)$.

Il reste à comparer les polynômes de Taylor des fonctions $\partial f/\partial x$ et P. D'après (6) la dérivée partielle de $\partial f/\partial x$ par rapport à y (à x constant) est égale à $\partial Q/\partial x$; celle de la fonction P est $\partial P/\partial y$. On voit que ces dérivées partielles ne sont pas en général égales. Mais elles le sont en tout point où la forme ω est fermée. On montre de même que les coefficients des polynômes de Taylor envisagés sont égaux en tout point de AB où ω est fermée.

IV. **Intégration le long d'une ligne polygonale.**

PROPOSITION II. *Soit Γ une ligne polygonale sans points doubles, dont les sommets sont $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(A_0 \neq A_n)$. Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle dont les coefficients P et Q sont des fonctions r fois continûment dérivables définies sur un pavé compact K, à l'intérieur duquel est située Γ.*

Nous exigeons que la forme ω soit fermée sur l'ensemble F des sommets. Il existe alors une fonction $f(x, y)$ $r+1$ fois continûment dérivable sur K, et telle qu'en tout point de F les fonctions $\partial f/\partial x$ et P (resp $\partial f/\partial y$ et Q) aient le même polynôme de Taylor. De plus cette fonction satisfait à l'inégalité (9) *ci-dessous: (La signification des symboles qui interviennent dans cette inégalité sera exposée en cours de démonstration).*

Remarquons tout d'abord que l'assertion relative au caractère $r+1$ fois continûment dérivable de f est très banale; F est un ensemble fini; une formule d'interpolation analogue à la formule d'interpolation d'Hermite permet de prolonger tout champ taylorien defini sur F en un polynôme.

C'est dans l'inégalité (9) que réside tout l'intérêt de la Proposition II.

Commençons par utiliser la Proposition I pour intégrer la forme ω sur les cotés successifs de Γ. On peut choisir les constantes d'intégration de la première formule (6) de façon que $\dot{f}(A_0)=0$ et que la fonction f ne subisse pas de discontinuités aux sommets A_k.

Comme la forme ω est fermée sur F, par hypothèse, la Proposition I permet d'affirmer que les polynômes de Taylor de la différentielle df et de la forme ω concordent en tout point de F.

Nous nous proposons de majorer l'expression $|\dot{f}(M)-T_N\dot{f}(M)|$ pour M et $N\in F$ de manière à pouvoir, par la suite, vérifier les conditions (4). Dans ce but appliquons *la formule de Stokes* à la forme ω, et au contour formé par la portion de ligne polygonale située entre M et N complétée par le segment MN.

L'intégrale prise le long de la portion de ligne polygonale est égale à $f(M)-f(N)$, par définition de la fonction f.

La formule de Stokes s'écrit

$$f(M) - f(N) = \int_M^N \omega + \iint d\omega. \tag{7}$$

L'intégrale simple du second membre est prise le long du segment MN. L'intégrale double est étendue à une chaine à deux dimensions admettant comme bord un contour constitué par la portion de ligne polygonale limitée en M et N, complétée par le segment MN. Comme le segment MN peut recouper la ligne polygonale, le contour considéré admet en général des points doubles.

Etude de l'intégrale simple. Utilisons la Proposition I. Celle-ci affirme l'existence d'une fonction $g(x, y)$ $r+1$ fois continûment dérivable satisfaisant aux conditions suivantes:

La différentielle de g est égale à ω en tout point du segment MN. On a

$$g(N) = f(N) \quad \text{et} \quad T_N g = T_N f.$$

(En effet la forme ω étant fermée en N les dérivées partielles de f et g concordent en N avec les dérivées correspondantes de ω.) Enfin

$$|g(M) - T_N g(M)| \leqq \frac{\|NM\|^{r+1}}{(r+1)!}\cdot\alpha(\|NM\|)$$

où α est un r-module de continuité commun aux fonctions P et Q.

On voit que $\int_N^M\omega=g(M)-g(N)$. En ajoutant aux deux membres de (7) le nombre $g(N)-T_Ng(M)=f(N)-T_Nf(M)$, on obtient

$$f(M) - T_N f(M) = g(M) - T_N g(M) + \iint d\omega.$$

Finalement

$$|f(M) - T_N f(M)| \leqq \frac{\|NM\|^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \alpha(\|NM\|) + \left|\iint d\omega\right|. \tag{8}$$

Etude le l'intégrale double. Examinons séparément le domaine d'intégration et l'intégrande.

Le *domaine d'intégration* est une chaine à deux dimensions constituée par un nombre fini de domaines polygonaux affectés de coefficients entiers (positifs ou négatifs): le coefficient affecté à un de ces domaines s'appelle l'*index topologique* du domaine (cf. Cesari [1]). On remarquera que si la ligne polygonale a l'aspect d'une spirale certains des domaines pourront être affectés de coefficients élevés.

DÉFINITION. Nous appelerons "*aire positive vraie*" d'un ouvert borné limité par une ligne polygonale (admettant éventuellement des points doubles) la somme pondérée des aires (positives) de chaque composante connexe de l'ensemble ouvert: chacune de ces composantes connexes ayant un ordre de multiplicité égal à la valeur absolue de son index topologique.

NOTATION. Nous noterons $\mathcal{S}(M, N)$ l'aire positive vraie de l'ouvert borné limité par le contour formé par la portion de Γ limitée par M et N, complétée par le segment MN.

L'intégrande est $d\omega = \{(\partial P/\partial y)(x, y) - (\partial Q/\partial x)(x, y)\} dx \wedge dy$.

$$d\omega = G(x, y)\, dx \wedge dy,$$

où $G(x, y)$ est une fonction $r-1$ fois continûment dérivable admettant un $r-1$ module de continuité égal à 2α, (car $\partial P/\partial y$ et $\partial Q/\partial x$ admettent le $r-1$ module α).

Comme ω n'est pas fermée partout $G(x, y)$ n'est pas nulle, en général. Mais G s'annule ainsi que ses dérivées partielles (d'ordre $\leqq r-1$) en tout point où ω est fermée (en particulier en tout point de F). En utilisant la distance du point de coordonnées x, y à l'ensemble des points où ω est fermée, et en utilisant la formule de Taylor on obtient une majoration de $G(x, y)$.

NOTATION. Nous noterons $\rho(M, N)$ le maximum de la distance d'un point décrivant le domaine d'intégration (dont l'aire positive vraie est $\mathcal{S}(M, N)$) à l'ensemble des points où ω est fermée.

En tout point du domaine d'intégration on peut écrire

$$|G(x, y)| \leqq \frac{\rho(M, N)^{(r-1)}}{(r-1)!} \cdot 2\alpha(\rho(M, N)).$$

Il en résulte que

$$\left|\iint d\omega\right| \leqq \frac{\rho(M, N)^{(r-1)}}{(r-1)!} \cdot 2\alpha(\rho(M, N)) \cdot \mathcal{S}(M, N).$$

En rapprochant de la formule (8), on trouve

$$|f(M) - T_N f(M)| \leqq \frac{\|NM\|^{r+1}}{(r+1)!}\cdot\alpha(\|MN\|) + \frac{\rho(M, N)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot 2\alpha(\rho(M, N))\cdot \mathcal{S}(M, N). \tag{9}$$

C'est l'inégalité que nous avions en vue.

Nous allons appliquer la Proposition II à la solution du Problème C de la façon suivante: Nous inscrirons dans la courbe Γ donnée une suite de lignes polygonales comme il a été dit au §II.

A la ligne polygonale dont l'ensemble des sommets est F_i on peut faire correspondre les deux fonctions $\mathcal{S}_i(M, N)$ et $\rho_i(M, N)$ qui ont été définies au cours de la démonstration de la Proposition II.

THÉORÈME GÉNÉRAL. *Supposons qu'il existe un entier* $m \leqq r+1$ *et un module de continuité* β *tel que*

$$\frac{|\rho_i(M, N)|^{r-1}}{(r-1)!}\cdot 2\alpha(\rho(M, N))\cdot \mathcal{S}_i(M, N) \leqq \frac{\|MN\|^m}{m!}\cdot\beta(M, N) \tag{10}$$

alors le Problème C *admet une solution pour l'entier* m.

En effet, sous ces hypothèses l'inégalité (9) implique l'existence d'un module de continuité $\gamma(x)$ tel que

$$|f_i(M) - T_N f_i(M)| \leqq \frac{\|MN\|^m}{m!}\cdot\gamma(\|MN\|) \tag{11}$$

où M et N appartiennent à F_i et où f_i est la fonction construite suivant le procédé de la Proposition II, à l'aide de la ligne polygonale dont l'ensemble des sommets est F_i.

Nous allons montrer que le champ W-taylorien $\dot{f}_i$ induit par f_i sur l'ensemble fermé F_i satisfait bien aux deux conditions (4).

(a) Les $\dot{f}_i$ possèdent bien un m-module de continuité commun: il suffit de prendre n'importe quel module de continuité qui domine simultanément α et β. (A un facteur constant près).

(b) Il existe une constante C indépendante de i telle que $|||\dot{f}_i|||^m_{F_i} \leqq C$.

En effet, par définition $|||\dot{f}_i|||^m_{F_i}$ est le plus grand des quatre nombres suivants:

(1°) $|||P|||^m_{F_i} \leqq |||P|||^m_{\Gamma}$, (2°) $|||Q|||^m_{F_i} \leqq |||Q|||^m_{\Gamma}$,

(3°) $$\operatorname{Max} \frac{|f_i(M) - T_N f_i(M)|}{\|MN\|^m}$$

pour M et $N \in F_i$ (ce nombre est majoré par $\gamma(d)/m!$ d'après l'inégalité (11) (d désigne le diamètre de Γ)

4°) $$\text{Max } |f_i(M)| \qquad \text{pour } M \in F_i.$$

Ce nombre se majore à l'aide de la formule $|f_i(M) - T_A f_i(M)| \leqq d^m/m! \cdot \gamma(d)$. On tient compte de $f_i(A) = 0$ et l'on remarque que le polynôme $T_A f_i$ est indépendant de l'indice i: son terme constant est nul ($f_i(A) = 0$) et les autres coefficients sont entièrement déterminés par la connaissance des fonctions P et Q.

Comme les quatres nombres précédents ont été majorés indépendamment de i la condition (4) (b) est bien remplie.

Et le §II permet de conclure que le Problème C admet une solution.

Nous allons maintenant donner deux exemples de courbes sur lesquelles la condition (10) est réalisée.

V. **Cas où la courbe Γ est le graphe d'une fonction continue.** Supposons que Γ soit la courbe représentative d'une fonction continue $\lambda(x)$ définie pour $0 \leqq x \leqq 1$. Pour tout point A de la courbe nous noterons $x(A)$ (resp $y(A)$) son abscisse (resp son ordonnée).

On obtient une ligne polygonale inscrite dans Γ en joignant des points de Γ dans l'ordre de leur abscisse croissante. Soient M et N deux sommets d'une telle ligne polygonale (l'ensemble des sommets étant noté F_i). Tout autre point A de F_i satisfaisant à $x(M) \leqq x(A) \leqq x(N)$ est un sommet d'un polygône appartenant à la chaine qui sert de domaine d'intégration pour l'intégrale double:

Majoration de $\rho(M, N)$. L'ouvert délimité par la portion de ligne polygonale d'extrémités M et N, et par le segment MN est inclus dans le rectangle $\mathcal{R}(M, N)$ déterminé par les droites suivantes: les parallèles *à* $0y$, d'abscisse $x(M)$ et $x(N)$; les parallèles à $0x$ dont l'ordonnée est le maximum, et le minimum de la fonction $\lambda(x)$ dans l'intervalle $[x(M), x(N)]$.

D'après le théorème de Bolzano, pour tout point A de l'ouvert, il existe un point de Γ d'ordonnée $y(A)$ et situé dans $\mathcal{R}(M, N)$. La distance de A à Γ est donc inférieure à $|x(M) - x(N)| \leqq \|MN\|$. Comme Γ est, par hypothèse, inclus dans l'ensemble des points où la forme ω est fermée, il s'ensuit que

$$\rho(M, N) < \|MN\|.$$

Majoration de $\mathcal{S}(M, N)$. Le segment MN recoupe en général la ligne polygonale, mais l'index topologique de chacune des composantes connexes de l'ouvert n'est égal qu'à $+1$ ou -1, suivant que cette composante connexe est au dessus ou au dessous du segment MN. L'aire positive vraie de l'ouvert se réduit donc à la somme des aires des composantes connexes: cette aire est donc majorée par l'aire de $\mathcal{R}(M, N)$.

Soit $\beta(x)$ un module de continuité de la fonction $\lambda(x)$. L'aire du rectangle $\mathcal{R}(M, N)$ est majorée par $|x(M) - x(N)| \cdot \beta(|x(M) - x(N)|)$ ou encore par $\|MN\| \cdot \beta(\|MN\|)$

$$\mathcal{S}(M, N) \leqq \|MN\| \cdot \beta(\|MN\|).$$

La formule (9) devient ici

$$|f_i(M) - T_N f_i(M)| \leqq \|MN\|^r \cdot \left\{ \frac{\|NM\| \cdot \alpha(\|NM\|)}{(r+1)!} + \frac{2\alpha(\|NM\|) \cdot \beta(\|NM\|)}{(r-1)!} \right\}.$$

En désignant par $\gamma(x)/r!$ un module de continuité qui majore l'accolade on peut appliquer le théorème général (formule (10)) et énoncer:

PROPOSITION. *Si* Γ *est le graphe d'une fonction continue, le Problème* C *admet une solution en prenant* $m = r - 1$.

REMARQUES. (1°) En général on ne peut pas affirmer que le Problème B admet une solution, car l'accolade n'est pas négligeable devant $\|MN\|$. Mais dans des cas particuliers, il peut se produire que le produit $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ soit négligeable devant x, et l'on peut prendre $m = r$. (2°) Les conclusions précédentes s'étendent à toutes les courbes pour lesquelles les majorations

$$\rho(M, N) \leqq \|MN\| \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(M, N) \leqq \|MN\| \cdot \beta(\|MN\|)$$

sont valables. C'est, le cas pour la courbe qui fait l'objet du §VII. Cependant ce n'est pas un graphe de fonction.

VI. **Courbes localement semblables à elles-même.** La courbe de von Koch (cf. von Koch [1]) est le prototype des courbes localement semblables à elles-même: Pour chaque point de la courbe on peut trouver un voisinage aussi petit que l'on veut qui est semblable à la courbe entière. M. Louis Antoine a décrit [1] un processus de construction (englobant le cas de la courbe de von Koch, et de l'ensemble de Cantor) qui permet d'obtenir des courbes de ce type. Le triangle isocèle qui est utilisé par von Koch peut être remplacé par des figures diverses (du plan ou de l'espace) (cf. par exemple Choquet [1], Whitney [2]).

Soit donc Γ une courbe plane, localement semblable à elle-même et admettant une aire positive vraie finie (lorsqu'on la complète par un segment). Soit d son diamètre (euclidien). D'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut trouver une longueur $d_1 < d$ et un nombre k $(1 < k \leqq d/d_1)$ tel que tout arc de diamètre $\leqq d_1$ puisse être soumis à une similitude de rapport k qui l'applique dans Γ.

Pour étudier les fonctions $\rho(M, N)$ et $\mathcal{S}(M, N)$ commençons par les envisager pour des couples de points M, N tels que $\|MN\| \geqq d_1$. Dans ces conditions il existe deux constantes K et K' telles que

$$\rho(M, N)/\|MN\| \leqq K \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(M, N)/\|MN\|^2 \leqq K'. \tag{12}$$

Mais comme les rapports precédents sont invariants par similitude, la conclusion reste valable pour des couples de points tels que $\|MN\| \geqq d_1/k$; et plus généralement $\|MN\| \geqq d_1/k^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Finalement les inégalités (12) sont valables pour tout couple de points M, N de Γ.

Portons ces résultats dans la formule (9). On peut alors majorer le second membre par une expression de la forme $\|MN\|^{r+1}/r!\cdot K''\cdot\alpha(\|MN\|)$.

Le théorème général, formule (10), permet d'affirmer que pour les courbes planes localement semblables à elles-même et d'aire positive vraie finie le Problème B possède toujours une solution (pour $r\geqq 1$).

Remarques. (1°) Le raisonnement précédent peut-se généraliser au cas des courbes ayant la propriété suivante:

"Tout point de la courbe Γ possède un voisinage (dans R^2) homéomorphe à un voisinage de toute la courbe, en sorte que les homémorphismes possèdent les deux propriétés suivantes:

Ils appliquent l'arc de Γ situé dans le voisinage, dans la courbe.

Ils sont uniformément lipschitsiens (pour la métrique euclidienne)."

(2°) On peut appliquer le raisonnement précédent à des courbes situées dans R^n. Mais, pour utiliser la formule de Stokes il est nécéssaire de pouvoir étudier des cloisons s'appuyant sur les lignes polygonales inscrites et d'avoir des renseignements sur l'aire positive vraie de ces cloisons. Le procédé cité par M. L. Antoine permet de construire de telles courbes gauches: on prendra soin de construire simultanément la courbe et la cloison.

(3°) Les courbes précédentes sont des courbes 1-critiques (cf. Glaeser [1]). Il existe des fonctions 1-fois continûment dérivables non constantes sur ces courbes et y admettant une différentielle nulle. Le procédé d'intégration permet, suivant M. Sion, de construire des fonctions m-fois continûment dérivables dont toutes les dérivées partielles d'ordre m s'annulent sur Γ, sans que les dérivées $m-1$-ième y restent constantes.

VII. **Un contre-exemple.** *La courbe*: C'est une schématisation du graphe de la fonction $y=x^{1/2}\sin\pi/2x$.

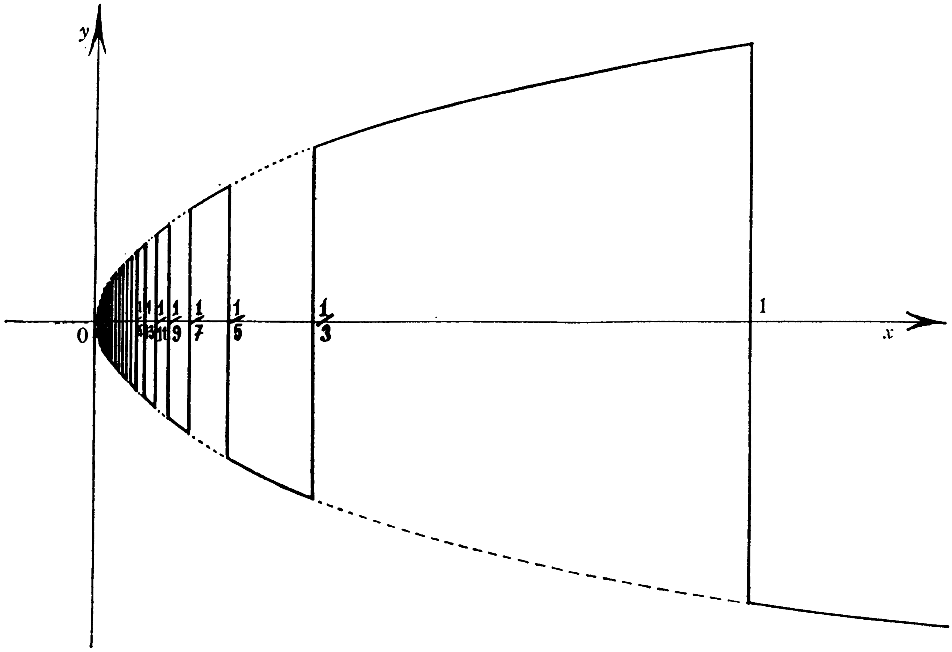
On part de la parabole $y^2=x$. La courbe Γ comprend toutes les cordes d'abscisse $1/2n+1$ ($n=0, 1, 2, \cdots$) raccordées par des arcs de parabole dont l'ordonnée est alternativement positive et négative. Γ n'est pas rectifiable (courbe de "longueur infinie"). *Les fonctions* dont il sera question dans ce paragraphe seront, par définition *nulles pour* $y^2\geqq x$, et en particulier *à l'origine.* La fonction $F(x, y)$ sera définie dans l'ouvert $y^2<x$ par

$$F(x, y) = (x-y^2)^4\sin\pi/2x. \tag{13}$$

Nous allons montrer que cette fonction est 1-fois continûment dérivable dans tout le plan. Ses dérivées sont données dans l'ouvert $y^2<x$ par les formules:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 4(x-y^2)^3\sin\frac{\pi}{2x}-\frac{\pi}{2}(x-y^2)^4\frac{1}{x^2}\cos\frac{\pi}{2x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -8(x-y^2)^3y\sin\frac{\pi}{2x}\cdot$$



Dans l'ouvert $y^2 < x$ on peut majorer $|x - y^2|$ par $2|x|$ et $|y|$ par $x^{1/2}$. Il en résulte des majorations pour $F(x, y)$ et ses dérivées

$$|F(x, y)| < (2x)^4 \qquad \text{etc.}$$

qui sont évidemment aussi valables en dehors de l'ouvert. Elles prouvent que nos trois fonctions sont continues à l'origine.

Enfin on notera que toutes les fonctions dont il est question dans ce paragraphe font apparaitre le facteur $(x - y^2)$ multiplé par une expression qui reste bornée sur tout compact. Ce qui établit la continuité au voisinage de tout point de la parabole $y^2 = x$.

Ainsi $F(x, y)$ est 1-fois continûment dérivable; mais on remarquera qu'elle n'est pas 2-fois continûment dérivable (ainsi que sa restriction à l'axe $0x$: le second terme du second membre de l'expression de $\partial F/\partial x(x, y)$ se réduit, sur $0x$, à $-(\pi/2)x^2 \cdot \cos \pi/2x$ qui n'est pas *continûment* dérivable).

Ceci posé, considérons la forme différentielle $\hat{\omega} = \hat{P}(x, y)dx + \hat{Q}(x, y)dy$ où $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ (nuls pour $y^2 < x$) sont définis dans l'ouvert $y^2 \geqq x$ par

$$(14) \qquad \hat{P}(x, y) = 4(x - y^2)^3 \sin \frac{\pi}{2x} \quad \text{et} \quad \hat{Q}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

On vérifie immédiatement, comme pour $F(x, y)$ que $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ sont 1-fois continûment dérivables dans tout le plan: Il est à noter que $\hat{P}$ se déduit de

$(\partial F/\partial x)(x, y)$ par suppression du terme "génant"([2]). Bien que dF et $\hat{\omega}$ ne soient pas égales dans tout le plan, on constate qu'elles prennent *la même valeur en tout point de la courbe* Γ, car $x-y^2$ s'annule sur la parabole, et $\cos \pi/2x$ s'annule sur les cordes verticales d'abscisse $1/2n+1$.

Enfin on vérifie qu'*en tout point de* Γ, on a $(\partial \hat{P}/\partial y)(x, y) = (\partial \hat{Q}/\partial x)(x,y)$. En effet, dans l'ouvert $y^2<x$,

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial y}(x, y) = -24(x-y^2)^2 \cdot y \cdot \sin \frac{\pi}{2x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -24(x-y^2)^2 \cdot y \cdot \sin \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{2}\,\frac{8(x-y^2)^3 y}{x^2} \cos \frac{\pi}{2x},$$

$\hat{\omega}$ est donc une forme différentielle 1-fois continûment dérivable *fermée sur* Γ. Et $F(x, y)$ est une solution particulière du Problème C pour Γ et $\hat{\omega}$. Nous allons en déduire qu'il *n'existe pas de solution du Problème* B pour Γ et $\hat{\omega}$.

En effet, supposons qu'il existe une solution $f(x, y)$ du Problème B. Montrons que *sur la courbe* Γ les fonctions f et F ne différent que par une constante: En effet tout arc compact de Γ ne contenant pas l'origine est rectifiable. Comme f et F ont même différentielle sur un tel arc, on conclut que f et F ne différent que par une constante sur le complémentaire de l'origine (par rapport à Γ). Par continuité, le résultat s'étend à Γ, origine comprise.

La fonction $f(x, y)$ devrait donc induire sur Γ le champ taylorien d'ordre 2 suivant:

$$f = F + C; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Nous allons vérifier que ce champ taylorien *n'est pas* un champ W-taylorien d'ordre 2. Désignons par A_n le point de coordonnées $x_n = 1/2n+1$, $y_n = 0$, il nous suffira de vérifier que le rapport

$$\frac{|f(A_{n+1}) - T_{A_n} f(A_{n+1})|}{\|A_n A_{n+1}\|^2}$$

ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En fait ce quotient tend vers 2([3]). La restriction de $\hat{\omega}$ à Γ possède les caractères suivants: C'est une forme

[2] Voici, pour la commodité du lecteur, les deux dérivées partielles qui n'intervienne pas dans le texte: $(\partial P/\partial x)(x, y) = 12(x-y^2)^2 \sin(\pi/2x) - (\pi/2)(4(x-y^2)^3/x^2)\cos(\pi/2x)$, $(\partial \hat{Q}/\partial y) \cdot (x, y) = (x-y^2)^2[48y^2 - 8(x-y^2)] \cdot \sin(\pi/2x)$. Les inégalités suivantes sont valables dans tout le plan: (15) $|\hat{P}(x, y)| \leqq 32|x|^3$, $|(\partial \hat{P}/\partial x)(x, y)| \leqq 12(2x)^2 + 16\pi|x|$.

[3] Le numérateur s'écrit $f(A_{n+1}) - f(A_n) - (x_{n+1} - x_n)\hat{P}(A_n) - ((x_n - x_{n+1})^2/2)(\partial \hat{P}(A_n)/\partial x)$. Le dénominateur étant un infiniment petit du 4-ième ordre par rapport à $1/n$, on est ramené (après suppression des infiniment petits d'ordre supérieur (cf. (15)) note ci-dessus) à chercher la limite de $|f(A_{n+1}) - f(A_n)| / \|A_{n+1} A_n\|^2$ pour $n \to \infty$.

1-fois continûment dérivable *fermée sur* Γ. On peut se proposer de la prolonger à tout le plan: il est possible d'obtenir un prolongement 1-fois continûment dérivable; on peut aussi obtenir un prolongement qui soit une différentielle exacte (d'une fonction 1-fois continûment dérivable); mais il est impossible de satisfaire simultanément à ces deux exigences.

VIII. **Intégration des formes indefiniment derivables.** Soit $\hat{\omega}=\hat{P}(x, y)dx+\hat{Q}(x, y)dy$ une forme différentielle *indéfiniment* dérivable. Les fonctions $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ induisent sur une courbe Γ un *champ taylorien d'ordre infini.* Lorsqu'on ne retient d'un tel champ que les dérivées partielles d'ordre $\leqq m$, on dit que l'on effectue la *projection d'ordre m* du champ taylorien. Une forme $\hat{\omega}$ indéfiniment dérivable est *fermée* sur Γ, si chacune de ses projections d'ordre fini est fermée.

Nous avons pu construire un exemple (trop compliqué pour trouver sa place ici) d'une courbe (en forme de spirale à spires irrégulières) et d'une forme *indéfiniment dérivable*, fermée sur la courbe, et telle que le Problème C ne soit possible que pour $m=1$.

Cependant on peut énoncer:

Théorème. *Soit une courbe possèdant les deux propriétés infinitésimales suivantes*:

(1°) *L'ensemble des* $\mathcal{S}(M, N)$ *reste borné lorsque* M *et* N *décrivent la courbe.*

(2°) *Il existe un entier* k *tel que*

$$\rho(M, N) \leqq \|MN\|^{1/k}.$$

Alors pour toute forme différentielle indéfiniment dérivable $\hat{\omega}$ *et fermée sur* Γ, *on peut trouver une fonction* $f(x, y)$ *indéfiniment dérivable, telle que la différentielle* df *et* $\hat{\omega}$ *induisent le même champ taylorien sur* Γ.

En effet, appliquant le théorème général à la projection d'ordre mk de $\hat{\omega}$, on peut trouver une fonction m-fois continûment dérivable solution du Problème C, et nulle en un point A fixé sur Γ.

Ceci peut être obtenu pour tout m.

Soit $f_m(x, y)$ cette fonction. Or dès que $m\geqq 2$ les fonctions f_m induisent la même fonction sur Γ. En effet, un théorème de A. P. Morse [1] affirme que sur tout ensemble connexe de l'espace $\mathbb{R}^n$, toute fonction n-fois continûment dérivable ayant une différentielle nulle sur cet ensemble est constante. La différence $f_m-f_{m'}$ est donc nulle sur Γ, dès que m et m' sont supérieurs à 2. Appelons f la fonction définie sur Γ et égale à f_m $(m\geqq 2)$. Cette fonction est la première composante d'un champ taylorien d'ordre infini dont les dérivées partielles sont déterminées à partir de ω. Ce champ taylorien est tel que *chacune de ses projections d'ordre m est un champ W-taylorien d'ordre m.*

Un théorème de Whitney (cf. [1, p. 71]) affirme que cette dernière condition est nécéssaire et suffisante pour que l'on puisse prolonger le champ taylorien en une fonction *indéfiniment dérivable* définie dans R^2. Une telle fonction résoud donc le problème.

BIBLIOGRAPHIE

L. ANTOINE

1. *Sur les voisinages de deux figures homéomorphes*, Fund. Math. vol. 5 (1924) pp. 265–287.

L. CESARI

1. *Surface area*, Annals of Mathematics Studies, no. 35, Princeton, 1956, p. 83.

G. CHOQUET

1. *L'isometrie des ensembles dans ses rapports avec la theorie du contact et de la mesure*, Mathematica, vol. 20 (1944) pp. 29–64.

A. DENJOY

1. *Sur l'intégration des différentielles totales et la métrique de courbes*, C. R. Acad. Sci. vol. 196 (1933) p. 838.

G. GLAESER

1. *Etude de quelques algèbres tayloriennes* (thèse Nancy 1957) J. Analyse Math. vol. 6 (1958) pp. 1–124.
2. *Sur le théorème du prolongement de Whitney*, C. R. Acad. Sci. vol. 245 (1957) pp. 617–619.
3. *Propriétés m fois continûment dérivables des ensembles fermés*, C. R. Acad. Sci. vol. 245 (1957) pp. 780–782.

C. JORDAN

1. *Traité d'analyse*, 3 vols., 3d ed., Paris, Gauthier-Villars, 1909–1915.

VON KOCH

1. *Une méthode géometrique élémentaire pour l'étude de certaines courbes planes*, Acta Math., 1906.

A. MORSE

1. *The behaviour of a function on its critical set*, Ann. of Math. vol. 90 (1939) pp. 62–70.

M. SION

1. *On the existence of functions having given partial derivatives on a curve*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 77 (1954) pp. 179–201.

H. WHITNEY

1. *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36 (1934) pp. 63–89.
2. *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. vol. 1 (1935) pp. 514–517.

UNIVERSITY OF NANCY,
NANCY, FRANCE