

DUAL ET QUASI-DUAL D'UNE ALGÈBRE DE BANACH INVOLUTIVE

PAR
J. DIXMIER

Le présent travail est une suite à un mémoire de J. A. Ernest [4]. Pour abréger, nous renvoyons à [4] pour les définitions et les notations principales.

Soit \mathfrak{W} une algèbre de Banach involutive séparable. On considère les représentations factorielles de \mathfrak{W} dans des espaces hilbertiens séparables⁽¹⁾; les classes de quasi-équivalence de telles représentations forment un ensemble $\tilde{\mathfrak{W}}$ qui a été muni dans [4] d'une structure borélienne; l'espace borélien $\tilde{\mathfrak{W}}$ est appelé quasi-dual de \mathfrak{W} . Par ailleurs soit $\hat{\mathfrak{W}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de \mathfrak{W} dans des espaces hilbertiens séparables; l'ensemble $\hat{\mathfrak{W}}$ a été muni par G. W. Mackey [7] d'une structure borélienne; l'espace borélien $\hat{\mathfrak{W}}$ est appelé dual de \mathfrak{W} .

Deux représentations irréductibles de \mathfrak{W} sont quasi-équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes. D'autre part, une représentation factorielle π de \mathfrak{W} est quasi-équivalente à une représentation irréductible si et seulement si π est de type I. Par suite, il existe une application bijective évidente Φ de $\hat{\mathfrak{W}}$ sur l'ensemble $\tilde{\mathfrak{W}}_I \subset \tilde{\mathfrak{W}}$ des classes (pour la quasi-équivalence) de représentations factorielles de type I de \mathfrak{W} . Nous montrerons dans ce mémoire que $\tilde{\mathfrak{W}}_I$ est une partie borélienne de $\tilde{\mathfrak{W}}$ et que Φ est un isomorphisme d'espaces boréliens. Des résultats partiels dans cette direction (non publiés) avaient déjà été obtenus par J. A. Ernest.

Rappelons qu'on note $H_1, H_2, \dots, H_\infty$ les espaces hilbertiens séparables types de dimension 1, 2, \dots, ∞ ; qu'on note \mathfrak{W}_n^e l'ensemble des représentations de \mathfrak{W} dans H_n , \mathfrak{W}^e la réunion des \mathfrak{W}_n^e , \mathfrak{W}^p l'ensemble des représentations factorielles appartenant à \mathfrak{W}^e ; nous noterons \mathfrak{W}^{irr} l'ensemble des représentations irréductibles appartenant à \mathfrak{W}^e . L'ensemble \mathfrak{W}^e est muni d'une structure d'espace borélien standard, et $\mathfrak{W}_n^e, \mathfrak{W}^p, \mathfrak{W}^{irr}$ sont des sous-ensembles boréliens de \mathfrak{W}^e .

Si H est un espace hilbertien, on désignera par $L(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus dans H .

Dans les Lemmes 1 et 2, nous sommes obligés de reprendre les raisonnements de [1, §6, Lemme 3 et Théorème 4], avec des hypothèses légèrement différentes. Nous adoptons les notations de [1]. Rappelons qu'on appelle crible une suite $C = (C_n, p_n)_{n \geq 0}$ telle que, pour tout n , C_n soit un ensemble

Received by the editors September 11, 1961.

⁽¹⁾ Toutes les représentations π de \mathfrak{W} que nous considérons sont "non dégénérées" en ce sens que les vecteurs $\pi(x)\xi$ (x parcourant \mathfrak{W} et ξ parcourant l'espace H de la représentation) sont partout denses dans H .

dénombrable et p_n une surjection de C_{n+1} sur C_n . Rappelons aussi qu'on appelle espace polonais un espace séparable E dont la topologie peut être définie par une distance rendant E complet.

LEMME 1. *Soit E un espace métrique séparable. Il existe un crible $C = (C_n, p_n)_{n \geq 0}$, et, pour chaque entier $n \geq 0$, une application ϕ_n de C_n dans l'ensemble des parties ouvertes non vides de E de diamètre $\leq 2^{-n}$, de manière que*

- (a) *E soit la réunion des $\phi_0(c)$ lorsque c parcourt C_0 ;*
- (b) *pour tout n , et tout $c \in C_n$, $\phi_n(c)$ soit la réunion des $[\phi_{n+1}(c')]^-$, où c' parcourt $p_n^{-1}(c)$.*

Il suffit de reprendre le raisonnement de [1, §6, Lemme 3], en remplaçant les ensembles fermés par des boules ouvertes, et en remarquant que, si B est une boule ouverte de E de rayon $\alpha > 0$, il existe un recouvrement de B par une suite de boules ouvertes B_n de rayon $< \alpha/2$ et telles que $\overline{B_n} \subset B$.

LEMME 2. *Soient E un espace polonais, R une relation d'équivalence dans E . Supposons que les classes d'équivalence suivant R soient fermées dans E , et que le saturé pour R de tout ensemble ouvert soit borélien. Alors il existe un ensemble borélien dans E qui rencontre chaque classe d'équivalence en un point et un seul.*

Considérons sur E une distance compatible avec la topologie et pour laquelle E soit complet. Soient $C = (C_n, p_n)$ et (ϕ_n) avec les propriétés du Lemme 1. Pour chaque $c \in C_n$, soit $g_n(c)$ le saturé pour R de l'ensemble ouvert $\phi_n(c)$; par hypothèse, $g_n(c)$ est borélien dans E . Exactement comme dans [1, §6, Théorème 4], on définit, pour tout n et tout $c \in C_n$, les $h_n(c)$, puis les ensembles décroissants S_n , et $S = \bigcap_n S_n$, qui sont encore boréliens. Pour tout entier $n \geq 0$ et toute classe d'équivalence H suivant R , il existe un élément et un seul $c \in C_n$, soit $c = c_n(H)$, tel que $h_n(c_n(H))$ rencontre H ; et l'on a $h_n(c_n(H)) \cap H = \phi_n(c_n(H)) \cap H$, $S_n \cap H = \phi_n(c_n(H)) \cap H$, $S = \bigcap_n \phi_n(c_n(H)) \cap H$, $p_n(c_{n+1}(H)) = c_n(H)$. (L'argument de [1], purement ensembliste, s'applique mot pour mot.) Comme $[\phi_{n+1}(c_{n+1}(H))]^- \subset \phi_n(c_n(H))$, on a $\bigcap_n \phi_n(c_n(H)) \cap H = \bigcap_n [\phi_n(c_n(H))]^- \cap H$. Or les $[\phi_n(c_n(H))]^- \cap H$ sont des ensembles fermés décroissants de diamètre $\leq 2^{-n}$, donc leur intersection se réduit à un point. Donc $S \cap H$ se réduit à un point, ce qui prouve le lemme.

LEMME 3. *Soient G un groupe topologique polonais, G' un sous-groupe fermé de G . Il existe une partie borélienne de G qui rencontre chaque classe à gauche suivant G' en un point et un seul.*

En effet, si R est la relation d'équivalence de G dont les classes sont les classes à gauche suivant G' , les conditions du Lemme 2 sont évidemment remplies.

Rappelons que, sur l'ensemble des opérateurs unitaires d'un espace hilbertien, les topologies faible et forte coïncident, et sont compatibles avec la structure de groupe.

LEMME 4. Soient H un espace hilbertien séparable, G le groupe des opérateurs unitaires de H . Pour la topologie forte (ou faible), G est un groupe polonais.

En effet, la boule unité $L_1(H)$ de $L(H)$ est compacte séparable pour la topologie faible, donc est un espace polonais. Il suffit [1, §6, Théorème 1] de montrer que G est intersection dénombrable de parties faiblement ouvertes de $L_1(H)$. Or, si (x_i) est une suite partout dense dans la sphère unité de H , G est l'ensemble des $T \in L_1(H)$ tels que $\|Tx_i\| > 1 - 1/j$, $\|T^*x_i\| > 1 - 1/j$ quels que soient i et j . Et chacune de ces inégalités définit une partie faiblement ouverte de $L_1(H)$.

Ceci posé, nous revenons aux notations du début de cet article. Pour $n = 1, 2, \dots, \infty$, soit $\mathfrak{W}_{I_n} \subset \mathfrak{W}^p$ l'ensemble des représentations π de \mathfrak{W} telles que $\pi(\mathfrak{W})'$ soit un facteur de type I_n . On a $\mathfrak{W}_{I_1} = \mathfrak{W}^{\text{irr}}$. Soit \mathfrak{W}_I la réunion des \mathfrak{W}_{I_n} . Alors \mathfrak{W}_I est l'ensemble des représentations factorielles de type I de \mathfrak{W} (dans $H_1, H_2, \dots, H_\infty$). Les ensembles \mathfrak{W}_{I_n} sont saturés pour l'équivalence unitaire mais pas pour la quasi-équivalence; au contraire, \mathfrak{W}_I est saturé pour la quasi-équivalence. Une représentation de \mathfrak{W}_{I_n} est unitairement équivalente à une représentation de la forme $\pi \oplus \pi \oplus \dots \oplus \pi$ (n termes) avec π irréductible. Les ensembles \mathfrak{W}_{I_n} ont tous la même image $\tilde{\mathfrak{W}}_I$ dans $\tilde{\mathfrak{W}}$.

LEMME 5. Soit B une partie borélienne de $\mathfrak{W}_{\text{irr}}$ saturée pour l'équivalence unitaire. Soit C l'ensemble des éléments de \mathfrak{W}_{I_p} quasi-équivalents à un élément de B . Alors C est borélien dans \mathfrak{W}^c .

Les ensembles $B \cap \mathfrak{W}_1^c, B \cap \mathfrak{W}_2^c, \dots$ sont boréliens et saturés pour l'équivalence unitaire. Il suffit de raisonner sur chacun de ces ensembles. Autrement dit, nous supposons désormais que les éléments de B opèrent dans un H_n . Alors les éléments de C opèrent dans H_{np} . Nous exposerons la démonstration pour $n = p = \infty$ (les autres cas se traitent de manière analogue et un peu plus simple). Posons alors $H_n = H_{np} = H$.

Soit (K_1, K_2, \dots) une suite infinie de sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie de H , deux à deux orthogonaux, de somme hilbertienne H . Soit J_n un isomorphisme de H sur K_n . Pour tout $T \in L(H)$, les opérateurs $J_n T J_n^{-1}$ définissent par linéarité et continuité un opérateur T' dans H , et $T \rightarrow T'$ est un isomorphisme de $L(H)$ sur un facteur F de type I_∞ , ensemble des opérateurs linéaires continus de H qui laissent stables les K_n et dont les parties induites dans les K_n sont échangées par les isomorphismes J_n, J_n^{-1} . Le commutant F' de F est aussi un facteur de type I_∞ . Soit π une représentation de \mathfrak{W} dans H . On notera π' la représentation $x \rightarrow \pi(x)'$ de \mathfrak{W} dans H . Si $\pi \in \mathfrak{W}^{\text{irr}}$, $\pi'(\mathfrak{W})$ engendre le facteur F . L'application $\pi \rightarrow \pi'$ est évidemment injective, et elle est borélienne; car soient $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots, \eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots \in H$, avec $\xi_i, \eta_i \in K_i$; on a, pour $x \in \mathfrak{W}$,

$$(\pi'(x)\xi \mid \eta) = \sum_{n \geq 1} (J_n \pi(x) J_n^{-1} \xi_n \mid \eta_n) = \sum_{n \geq 1} (\pi(x) J_n^{-1} \xi_n \mid J_n^{-1} \eta_n)$$

et chaque terme $(\pi(x)J_n^{-1}\xi_n | J_n^{-1}\eta_n)$ est une fonction borélienne de π . D'après [7, Théorème 3.2], l'ensemble B' des π' , où π parcourt B , est une partie borélienne de \mathfrak{W}^c , contenue dans \mathfrak{W}_{I_n} .

L'ensemble C de l'énoncé est la réunion des $UB'U^{-1}$, où U parcourt le groupe G des opérateurs unitaires de H . Autrement dit, C est l'image de $G \times B'$ par l'application $\Theta: (U, \sigma) \rightarrow U\sigma U^{-1}$ de $G \times B'$ dans \mathfrak{W}^c . Sur G , la topologie forte ou faible définit une structure borélienne standard, et Θ est une application borélienne [7, p. 152]. Nous allons montrer que, pour un élément U de G , les conditions suivantes sont équivalentes (pourvu que $B \neq \emptyset$, cas auquel on peut évidemment se limiter):

- (1) $UFU^{-1} = F$;
- (2) $U = VW$, avec V, W unitaires, $V \in F, W \in F'$;
- (3) $UB'U^{-1} = B'$;
- (4) il existe $\pi_1, \pi_2 \in B'$ tels que $U\pi_1 U^{-1} = \pi_2$.

(4) \Rightarrow (1): soient $\pi_1, \pi_2 \in B'$ avec $U\pi_1 U^{-1} = \pi_2$. Alors $U\pi_1(\mathfrak{W})U^{-1} = \pi_2(\mathfrak{W})$, donc, en prenant les adhérences faibles, $UFU^{-1} = F$.

(1) \Rightarrow (2): si $UFU^{-1} = F$, U définit un automorphisme de F . Or tout automorphisme d'un facteur de type I est défini par un opérateur unitaire de ce facteur [2, p. 253, Proposition 3] appliquée à $L(H)$). Il existe donc un opérateur unitaire V de F tel que $W = V^{-1}U$ définisse l'automorphisme identique de F , autrement dit appartienne à F' . Et on a $U = VW$.

(2) \Rightarrow (3): Soit $U = VW$, avec V, W unitaires, $V \in F, W \in F'$. Soit $\pi \in B$. On a $W\pi'(x)W^{-1} = \pi'(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{W}$. D'autre part, V est de la forme T' avec un opérateur unitaire T dans H . Alors $V\pi'(x)V^{-1} = (T\pi(x)T^{-1})'$, donc $V\pi'V^{-1} = (T\pi T^{-1})'$. Or $T\pi T^{-1} \in B$ puisque B est saturé pour l'équivalence unitaire. Donc $U\pi'U^{-1} \in B'$, et finalement $UB'U^{-1} = B'$.

(3) \Rightarrow (4): évident.

Les conditions (1)–(4) définissent un sous-groupe G' de G . Sur la condition (1), il est clair que G' est fermé. D'après les Lemmes 3 et 4, il existe un sous-ensemble borélien S de G qui rencontre chaque classe à gauche de G suivant G' en un point et un seul. Montrons que $\Theta(G \times B') = \Theta(S \times B')$. Il est clair que $\Theta(G \times B') \supset \Theta(S \times B')$. Réciproquement, soient $U \in G, \sigma \in B'$. On a $U = U_1 U_2$ avec $U_1 \in S, U_2 \in G'$. Alors $\Theta(U, \sigma) = U_1(U_2 \sigma U_2^{-1})U_1^{-1} \in U_1 B' U_1^{-1} \subset \Theta(S \times B')$ d'après la condition (3) ci-dessus, d'où l'égalité annoncée. Montrons que la restriction de Θ à $S \times B'$ est injective. Soient $\pi_1, \pi_2 \in B'$, et $W_1, W_2 \in S$, tels que $W_1 \pi_1 W_1^{-1} = W_2 \pi_2 W_2^{-1}$; alors $W_2^{-1} W_1$ vérifie la condition (4) ci-dessus, donc W_1 et W_2 appartiennent à la même classe à gauche suivant G' , donc $W_1 = W_2$, et alors $\pi_1 = \pi_2$. Ceci posé, $C = \Theta(S \times B')$ est borélien dans \mathfrak{W}^c d'après [7, Théorème 3.2].

THÉORÈME 1. Soit $n = 1, 2, \dots, \infty$. L'ensemble \mathfrak{W}_{I_n} est une partie borélienne de \mathfrak{W}^c . L'ensemble \mathfrak{W}_I est une partie borélienne de \mathfrak{W}^c .

La première assertion résulte du Lemme 5 appliqué à $B = \mathfrak{W}^{\text{irr}}$. La

deuxième assertion résulte de la première.

COROLLAIRE 1. *Les ensembles \mathfrak{W}_{I_n} , \mathfrak{W}_I , munis de la structure borélienne induite par celle de \mathfrak{W}^c , sont des espaces boréliens standard.*

COROLLAIRE 2. *$\tilde{\mathfrak{W}}_I$ est une partie borélienne de $\tilde{\mathfrak{W}}$.*

Comme on l'a remarqué dans l'introduction, l'injection canonique i de $\mathfrak{W}^{\text{irr}}$ dans \mathfrak{W}_I définit par passage aux quotients une bijection Φ de $\hat{\mathfrak{W}}$ sur $\tilde{\mathfrak{W}}_I$.

THÉORÈME 2. *L'application Φ est un isomorphisme de l'espace borélien $\hat{\mathfrak{W}}$ sur l'espace borélien $\tilde{\mathfrak{W}}_I$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{W}^{\text{irr}} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{W}_I \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ \hat{\mathfrak{W}} & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{\mathfrak{W}}_I \end{array}$$

Soient $p: \mathfrak{W}_I \rightarrow \tilde{\mathfrak{W}}_I$ et $q: \mathfrak{W}^{\text{irr}} \rightarrow \hat{\mathfrak{W}}$ les applications canoniques. Soit S une partie borélienne de $\tilde{\mathfrak{W}}_I$. Alors $p^{-1}(S)$ est une partie borélienne de \mathfrak{W}_I saturée pour la quasi-équivalence. Donc $i^{-1}(p^{-1}(S)) = q^{-1}(\Phi^{-1}(S))$ est une partie borélienne de $\mathfrak{W}^{\text{irr}}$ saturée pour l'équivalence unitaire. Donc $\Phi^{-1}(S)$ est borélien dans $\hat{\mathfrak{W}}$.

Soit T une partie borélienne de $\hat{\mathfrak{W}}$. Alors $q^{-1}(T)$ est une partie borélienne de $\mathfrak{W}^{\text{irr}}$ saturée pour l'équivalence. L'ensemble $p^{-1}(\Phi(T))$ est le saturé de $i(q^{-1}(T))$ pour la quasi-équivalence. Appliquant le Lemme 5 avec $B = q^{-1}(T)$, on voit que cet ensemble est borélien dans \mathfrak{W}_I . Donc $\Phi(T)$ est borélien dans $\tilde{\mathfrak{W}}_I$.

Le Théorème 2 permet d'identifier $\hat{\mathfrak{W}}$ à un sous-espace borélien de $\tilde{\mathfrak{W}}$.

Appendice: application du Lemme 2 à un problème de Mackey. Mackey a montré [7, Théorème 8.5] que, s'il existe dans $\mathfrak{W}^{\text{irr}}$ un ensemble borélien rencontrant chaque classe d'équivalence en un point et un seul, l'espace borélien $\hat{\mathfrak{W}}$ est dénombrablement séparé. On va voir que la réciproque est vraie:

THÉORÈME 3. *Si l'espace borélien $\hat{\mathfrak{W}}$ est dénombrablement séparé, il existe dans $\mathfrak{W}^{\text{irr}}$ un ensemble borélien rencontrant chaque classe d'équivalence en un point et un seul.*

Il existe une C^* -algèbre \mathfrak{W}' associée à \mathfrak{W} telle que les représentations de \mathfrak{W} dans un espace hilbertien s'identifient à celles de \mathfrak{W}' ; et on voit tout de suite que cette identification est compatible avec la topologie de la convergence simple forte. On peut donc supposer désormais que \mathfrak{W} est une C^* -algèbre. Alors, l'hypothèse que $\hat{\mathfrak{W}}$ est dénombrablement séparé entraîne que \mathfrak{W} est GCR ([3, Théorème 1] et [6, Théorème 2]).

Pour $n = 1, 2, \dots, \infty$, soient $\mathfrak{W}_n^{\text{irr}}$ l'ensemble des représentations irréductibles de \mathfrak{W} dans H_n , et $\hat{\mathfrak{W}}_n$ l'image de $\mathfrak{W}_n^{\text{irr}}$ dans $\hat{\mathfrak{W}}$. Pour la topologie de

la convergence simple forte, $\mathfrak{W}_n^{\text{irr}}$ est un espace polonais [3, Lemme 4]. La topologie quotient de celle de $\mathfrak{W}_n^{\text{irr}}$ sur $\hat{\mathfrak{W}}_n$ est la topologie induite sur $\hat{\mathfrak{W}}_n$ par la topologie naturelle de $\hat{\mathfrak{W}}$ [5, Corollaire du Théorème 3.1]. Comme \mathfrak{W} est GCR, cette topologie possède la propriété suivante [3, p. 7]: il existe une famille croissante bien ordonnée $(U_\rho)_{\rho \in P}$ de parties ouvertes de $\hat{\mathfrak{W}}$, avec P dénombrable, telle que les $V_\rho = U_{\rho+1} - U_\rho$ forment une partition de $\hat{\mathfrak{W}}$ et soient séparés. Chaque V_ρ est l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée de $\hat{\mathfrak{W}}$. Soit $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$ l'image réciproque de V_ρ dans $\mathfrak{W}_n^{\text{irr}}$. Alors $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$ est dans $\mathfrak{W}_n^{\text{irr}}$ l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée, donc un G_δ ; donc $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$ est un espace polonais [1, §6, Théorème 1]. Le saturé dans $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$ d'une partie ouverte est ouvert puisque l'équivalence unitaire dans \mathfrak{W}^c est définie par un groupe d'homéomorphismes. Enfin, comme V_ρ est séparé, les classes d'équivalence sont fermées dans $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$. On peut donc appliquer le Lemme 2: il existe une partie borélienne de $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$ rencontrant chaque classe de $\mathfrak{W}_{n,\rho}^{\text{irr}}$ en un point et un seul. Ceci étant vrai pour tout n et tout ρ , le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. IX, 2^e édition, Hermann, Paris, 1958.
2. J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
3. ———, *Sur les structures boréliennes du spectre d'une C^* -algèbre*, Publications Math. Institut Hautes Études Scientifiques, 6, pp. 5–11.
4. J. A. Ernest, *A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 252–277.
5. J. M. G. Fell, *C^* -algebras with smooth dual*, Illinois J. Math. **4** (1960), 221–230.
6. J. Glimm, *Type I C^* -algebras*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 572–611.
7. G. W. Mackey, *Borel structure in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 134–165.

INSTITUT HENRI POINCARÉ,
PARIS, FRANCE