TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 250, June 1979

ULTRAFILTRES A LA FAÇON DE RAMSEY[1]

BY

MARYVONNE DAGUENET-TEISSIER

ABSTRACT. Let $\beta\mathbf{N}$ be the set of ultrafilters on $\mathbf{N}$; $\mathfrak{U} \in \beta\mathbf{N}$ is "absolu" [6] (Ramsey [4]) if all its free images by continuous maps $\beta\mathbf{N} \to \beta\mathbf{N}$ are isomorphic. We study here a weaker Ramsey-like property, which implies the existence of fiber products $\mathfrak{D} \otimes_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$ ($\otimes_{\mathbf{E}}^{k} \mathfrak{D}$) extending the usual product $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ ($\otimes^{k} \mathfrak{D}$). This can be translated in the language of model-theory on the one hand as the existence of repeated almagamated sums and on the other hand by some properties of sets of indiscernibles associated with ultrafilters having this property (§5).

We show that the class of ultrafilters we study strictly contains the class of Ramsey ultrafilters (§1) and is (§2) strictly (§3) contained in the class of p-point ultrafilters [9] ("δ-stables" [6]) and contains the free images of its elements (§4). In §2 we also give a characterization of p-point ultrafilters in terms of the product $\otimes^{k} \mathfrak{D}$. In §3 we show the link with weakly Ramsey ultrafilters of Blass [3] and more generally we study ultrafilters $\mathfrak{D}$ on $\mathbf{N}$ having only a finite number $i(\mathfrak{D})$ of free images up to isomorphism and such that $\#\tau^{-1}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 2i(\mathfrak{D}) + 1$, where $\#\tau^{-1}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$ is the number of ultrafilters on $\mathbf{N}^2$ finer than the filter generated by $(D \times D)$ with $D \in \mathfrak{D}$.

Introduction.

0.1 Soit I un ensemble dénombrable, et soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur I. Le *germe en* $\mathfrak{F}$ *d'une application* h définie sur I consiste en la classe des applications f définies sur I dont la restriction à un élément A de $\mathfrak{F}$ coïncide avec la restriction à A de h, ce que nous notons $f =^{\mathfrak{F}} h$. Si pour un $A \in \mathfrak{F}$ la restriction $h \upharpoonright A$ de h à A est injective (ou constante), il en sera de même de $h \upharpoonright B$ pour $B \in \mathfrak{F}$ et $B \subset A$. Nous dirons dans ce cas que le *germe* de h en $\mathfrak{F}$ est *injectif* (ou *constant*). De même, si pour un $A \in \mathfrak{F}$ la restriction $h \upharpoonright A$ est *finijective*, c'est à dire telle que l'ensemble $\overset{-1}{h}(j) \cap A$ soit fini quel que soit $j \in h(A)$, nous dirons que le *germe* de h en $\mathfrak{F}$ est *finijectif*. L'*image* d'un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur I selon une application h de I dans J est l'ultrafiltre sur J engendré par les $h(D)$ pour $D \in \mathfrak{D}$. Elle est notée $h(\mathfrak{D})$.

Received by the editors August 10, 1975 and, in revised form, May 16, 1977.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 04A20; Secondary 02H05, 10N10, 05A17, 54G10, 04A30.

Key words and phrases. Ultrafilters, P-points, Ramsey ultrafilters, Ramsey theorem, indiscernibility, fiber product.

[1]Une version préliminaire de cet article figure dans ma thèse [7']. Les modifications concernent la Théorème 2.7 et les alinéas 2.7 à 2.9, 3.7, 4.4 à 4.7 où l'on tient compte des traveaux récents de Baumgartner et Taylor [0], Blass [3'] et Nešetřil et Rödl [12'].

© 1979 American Mathematical Society
0002-9947/79/0000-0252/$08.50

0.2 Soit I un ensemble dénombrable. Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur I est dit *absolu* **[6]** si toute application définie sur I est de germe injectif ou constant en $\mathfrak{D}$. Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur I est dit *δ-stable* **[6]**, **[9]** si toute application définie sur I est, en $\mathfrak{D}$, de germe constant ou *finijectif*.

0.3 Nous renvoyons le lecteur à (1.1) pour les notions de base concernant les filtres et les ultrafiltres, et à **[6]**, **[4]**, **[1]**, **[16]** pour les théorèmes d'existence d'ultrafiltres absolus et δ-stables à partir d'hypothèses de théorie des ensembles de plus en plus faibles.

Les deux propriétés combinatoires ci-dessus entraînent formellement un grand nombre d'autres propriétés, ce qui explique que les deux classes d'ultrafiltres correspondantes soient employées en Topologie et en Théorie des Modèles.

0.4 L'étude des germes de relations binaires donne des caractérisations utiles des deux classes d'ultrafiltres définies plus haut.

Soit $\mathfrak{D}$ un filtre sur un ensemble dénombrable I et soit R une relation k-aire sur I; le *germe de R en $\mathfrak{D}$* est l'ensemble des $S \subset I^k$ tels que pour un $A \in \mathfrak{D}$, $R \cap A^k = S \cap A^k$, ce que nous noterons $R =^{\mathfrak{D}} S$. Supposons $R \subset I^2$; si pour un $A \in \mathfrak{D}$, la relation $R \cap A^2$ est réflexive (symétrique ou transitive), il en sera de même de $R \cap (B \times B)$ pour tout $B \in \mathfrak{D}$ tel que $B \subset A$; nous dirons dans ce cas que le *germe* de R en $\mathfrak{D}$ est *réflexif* (*symétrique ou transitif*).

0.5 Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers. Nous avons pour les ultrafiltres absolus, une caractérisation qui explique que les ultrafiltres absolus sont parfois appelés ultrafiltres de Ramsey **[4]**: l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $\mathbf{N}$ est absolu si et seulement si pour tout $R \subset \mathbf{N}^2$ il existe $A \in \mathfrak{U}$ tel que

$$\text{ou bien} \quad R \supset (A \times A) \cap \{(x, y) | y > x\}$$

$$\text{ou bien} \quad R \cap (A \times A) \cap \{(x, y) | y > x\} = \varnothing.$$

Ce que nous exprimons en disant que "les éléments de A sont *indiscernables* par R". Il n'y a pas lieu de se restreindre à des partitions de $\mathbf{N}^2$ en deux parts et la caractérisation ci-dessus vaut en fait pour n'importe quelle partition de $\mathbf{N}^k$ en m parts, k et m étant finis.

Une propriété des ultrafiltres δ-stables, due à D. Booth **[4]**, est la suivante: si $\langle \mathbf{N}, R \rangle$ est un ordre total il existe un $A \in \mathfrak{D}$ tel que $\langle A, R \cap A^2 \rangle$ ait pour type d'ordre celui de $\mathbf{N}$ ou son opposé.

0.6 Soit I un ensemble dénombrable. Nous allons étudier ici les ultrafiltres $\mathfrak{D}$ sur I tels que toute partie R de I^2, symétrique, ait même germe en $\mathfrak{D}$ qu'une combinaison booléenne de relations d'équivalence (autrement dit ait même germe en $\mathfrak{D}$ qu'une partie S de I^2 obtenue à partir d'un nombre fini de relations d'équivalence à l'aide des opérations d'intersection, de réunion, et de complémentation). Nous dirons qu'un tel ultrafiltre est 2-*affable*.

Nous montrerons que la classe des ultrafiltres 2-affables contient strictement celle des ultrafiltres absolus (§1), et qu'elle est contenue strictement dans la classe des ultrafiltres δ-stables (§3). (L'inclusion est due à Labib Haddad. Elle est démontrée dans le §2.) Nous comparerons également en §3 les ultrafiltres 2-affables et les *ultrafiltres faiblement Ramsey* de Blass **[3]**.

0.7 Nous montrerons en (2.7) que si un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est 2-affable, il existe un produit $\mathfrak{D} \otimes_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$ qui joue vis-à-vis du produit habituel $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ le même rôle que le produit fibré vis-à-vis du produit ensembliste (voir (1.1) pour la définition, classique, de $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ et (2.6) pour la définition de $\mathfrak{D} \otimes_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$). Les ultrafiltres pour lesquels les produits $\mathfrak{D} \otimes_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$ existent sont qualifiés de 2-*rangés* (à traduire en anglais par 2-*square*), cette notion étant a priori plus faible que celle de 2-affable.

0.8 Les constructions d'ultrafiltres 2-rangés (§1) et les applications (§5) montrent qu'il n'y a pas de raison de se restreindre aux relations binaires. La notion d'ultrafiltre k-*rangé* est introduite au moyen des produits $\otimes^k_{\mathbf{E}}\mathfrak{D}$. J'ai mis plus de temps à dégager celle d'ultrafiltre k-*affable* et à voir ses rapports avec celle d'ultrafiltre k-rangé (§2), et pour ces deux sujets l'aide de A. Blass a été capitale. Cette notion repose sur la notion d'*ultrafiltre symétrique*: un ultrafiltre $\mathfrak{S}$ sur I^k étant symétrique si pour tout entier $h < k$, les diverses projections de $\mathfrak{S}$ sur I^h sont toutes égales. Le résultat le plus significatif pour les ultrafiltres k-affables est le suivant: Si un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur I a n images non isomorphes, le nombre d'ultrafiltres symétriques sur I^k contenant le filtre $\times{}^k\mathfrak{D}$ est au moins $n \cdot k! + 1$, et cette valeur borne est atteinte si et seulement si $\mathfrak{D}$ est k-affable.

0.9 Le §4 est consacré à l'étude des propriétés des ultrafiltres *rangés* (c'est à dire k-affables ou k-rangés pour tout k), et le §5 à la traduction de ces propriétés en language de la théorie des modèles.

0.10 Pour résumer, disons que un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur un ensemble I dénombrable et ordonné est absolu si et seulement si il existe pour tout entier k un et un seul prolongement de $\mathfrak{U}$ à I^k_+ (autrement dit à $\mathfrak{P}_k(I)$), et que, parallèlement, un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur I dénombrable est rangé si et seulement si il existe pour tout nombre entier $k \geqslant 3$ un et un seul prolongement à $\mathfrak{P}_k(I)$ de chacun des prolongements possibles de $\mathfrak{D}$ à $\mathfrak{P}_2(I)$; il est montré ici que le nombre de ces prolongements de $\mathfrak{D}$ à $\mathfrak{P}_2(I)$ est égal au nombre d'images non isomorphes de $\mathfrak{D}$ et peut prendre en tant que fonction de $\mathfrak{D}$ n'importe quelle valeur entière, Blass montrant en [3′] que ce nombre est fini.

0.11 Je remercie avec joie deux actifs "ultrafiltristes" de Paris D. Lascar et A. Louveau, qui ont subi–grande fut leur patience, véhémentes furent leurs critiques–différentes versions des plus hésitantes du travail présenté ici. A. Blass a ensuite pris la relève avec soin et gentillesse. Ses remarques nombreuses et critiques justifiées m'ont permis entre autres de rectifier la notion initiale d'ultrafiltre k-affable et de clarifier ses rapports avec la notion d'ultrafiltre k-rangé.

Je remercie également avec joie Monsieur Choquet qui a donné de son temps pour que la presque ultime version devienne plus lisible.

1. Existence d'ultrafiltres affables non absolus.

1.1 *Notations.*

Le cardinal d'un ensemble X est noté $\# X$.

Soient I un ensemble ordonné, k un entier et A un sous-ensemble de I^k; posons $A_+ = \{(x_1, \ldots, x_k) \in A | x_1 < x_2 < \cdots < x_k\}$.

Soit h une application de I dans J. Posons

$$^k\text{eq-}h = \{(x_1, \ldots, x_k) \in I^k | h(x_1) = h(x_2) = \cdots = h(x_k)\},$$

et

$$^k\text{dif-}h = \{(x_1, \ldots, x_k) \in I^k | i \neq j \Rightarrow h(x_i) \neq h(x_j)\}.$$

Pour $k = 2$, $^2\text{dif-}h = I^2 \dot{-} {}^2\text{eq-}h$; mais dès que $k > 2$, cette formule est fausse.

Dans le cas où $k = 2$, nous allègerons les notations ^{2}eq-h, ^{2}dif-h en eq-h, dif-h.

Soit A un ensemble, $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subset A\}$ et $\mathcal{P}_k(A) = \{B\colon B \subset A$ et $\# B = k\}$ tandis que A^k désigne l'ensemble des k-uplets (ordonnés) de A.

Un ultrafiltre sur I est *libre* si $(\bigcap F)$ pour $F \in \mathfrak{F}$ est vide; dans le cas contraire il est dit *principal.*

Convention. Tous les ultrafiltres que nous considèrerons dans la suite seront libres (sauf mention contraire). Aussi la mention libre sera omise le plus souvent.

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur I et A une partie de I; A est *compatible* avec $\mathfrak{F}$ si pour tout $F \in \mathfrak{F}$, $F \cap A \neq \varnothing$, autrement dit, si $\mathfrak{F}$ et A engendrent (par intersection finie et extension) un filtre.

Fidèles à la *convention* ci-dessus, lors de l'étude des images d'un ultrafiltre (libre), nous ne tiendrons compte que des images libres. Ainsi, toutes les images d'un ultrafiltre absolu (0.2) sont isomorphes, deux ultrafiltres $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ étant *isomorphes* s'il existe une application g de germe injectif telle que $\mathfrak{D} = g(\mathfrak{E})$.

Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre. D'après le *lemme fondamental de Kenyon-Katětov* **[10]** et **[12]**, l'égalité $f(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$ entraîne $f =^{\mathfrak{D}} \text{id}$ (voir 0.1). Par contre il se peut que $f(\mathfrak{D}) = g(\mathfrak{D})$ sans que $f =^{\mathfrak{D}} g$. Aussi, distinguerons-nous le nombre des *ultra-filtres-images* de $\mathfrak{D}$ et celui des *applications-images de* $\mathfrak{D}$, deux applications images f et g étant isomorphes si et seulement si pour une application h de germe injectif en $g(\mathfrak{D})$, nous avons $f =^{\mathfrak{D}} h \circ g$.

Soient I et J deux ensembles et soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ deux filtres sur I et J respectivement. Le filtre $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ désignera le filtre sur $I \times J$ engendré par les ensembles $F \times G$ pour $F \in \mathfrak{F}$ et $G \in \mathfrak{G}$, et le filtre $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}$ désignera le filtre sur $I \times J$ dont les éléments sont les ensembles X vérifiant $\{i|\{j|(i,j) \in X\} \in \mathcal{G}\} \in \mathfrak{F}$. Si les filtres $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des ultrafiltres, $\mathfrak{F} \otimes \mathcal{G}$ est également un ultrafiltre, alors que $\mathfrak{F} \times \mathcal{G}$ n'est qu'exceptionnellement un ultrafiltre.

Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur un ensemble I et soit k un entier > 2. $\times^k \mathfrak{D}$ désigne le filtre sur I^k obtenu en posant $\times^2 \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ et $\times^{i+1} \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \times (\times^i \mathfrak{D})$, tandis que $\otimes^k \mathfrak{D}$ désigne l'ultrafiltre sur I^k obtenu en posant $\otimes^2 \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ et $\otimes^{i+1} \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \otimes (\otimes^i \mathfrak{D})$.

Si $R \in \mathcal{P}(\mathbf{N}^k)$ et $R \neq \emptyset$, posons $a(R) = k$; nous nommerons ce nombre *poids* de R.

Soit $A \in \mathcal{P}(N)$. Si $A^k_+ \subset R$ ou si $A^k_+ \cap R = \emptyset$, les éléments de A sont dits *indiscernables par* R, *à l'ordre près* (voir [15]). Nous sous-entendrons "à l'ordre près" partout sauf lors du §5.

1.2 Proposition. *Supposons* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltre* δ*-stable sur* $\mathbf{N}$. *Il existe un ultrafiltre* $\mathfrak{D}$ *sur* $\mathbf{N}$ *et une application* h *de germe en* $\mathfrak{D}$ *non injectif tel que* $\mathfrak{U} = h(\mathfrak{D})$ *et tel que pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *le filtre* $\mathfrak{F}_k$ *sur* $\mathbf{N}^k$, *engendré par* $(D^k)_{D \in \mathfrak{D}}$, $\mathbf{N}^k_+$ *et* ${}^k\text{eq-}h$ *soit un ultrafiltre* δ*-stable.*

Preuve. Fixons nous d'abord une application h de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ non décroissante et non bornée et telle que l'application $n \to \# h^{-1}(n)$ soit elle-même non décroissante et non bornée et soit $({}^\alpha R)$ une numérotation de $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{P}(\mathbf{N}^k)$ par les ordinaux dénombrables non limites inférieurs à $\aleph_1$. Nous allons construire une suite de parties de $\mathbf{N}$, $({}^\alpha B)_\alpha$ avec $\alpha < \aleph_1$, décroissante aux ensembles finis près et vérifiant les deux hypothèses suivantes:

(H_1) Pour tout $\alpha < \aleph_1$, l'application $n \to \# {}^\alpha B \cap h^{-1}(n)$ est croissante et non bornée.

(Posons pour simplifier, ${}^\alpha B_n = \overset{-1}{h}(n) \cap {}^\alpha B$ et notons $\#\# {}^\alpha B$ l'application $n \to \# {}^\alpha B_n$.)

(H_2) Pour tout $\alpha < \aleph_1$, et tout $n \in N$, ${}^\alpha B_n$ est un ensemble d'indiscernables par ${}^\alpha R$.

L'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sera engendré par $(\overset{-1}{h}(A))$ pour $A \in \mathfrak{U}$ et $({}^\alpha B)$ pour $\alpha < \aleph_1$.

Voyons d'abord comment construire la suite $({}^\alpha B)$.

Posons ${}^0 B = \mathbf{N}$.

Supposons la suite $({}^\alpha B)$ construite pour tout $\alpha < \beta < \aleph_1$, et montrons comment construire ${}^\beta B$.

Supposons que l'on a $\beta = \gamma + 1$. Le théorème de Ramsey [13] sous sa forme finitiste (voir en [8] une version en termes de graphes) nous assure de l'existence pour tout $k \in \mathbf{N}$, d'une application φ_k non décroissante et non bornée telle que tout ensemble F de cardinalité m contient, pour R donné $\subset F^k$, un ensemble d'indiscernables par R de cardinal $\varphi_k(m)$.

D'après l'hypothèse H_1, l'application $\#\#^{\gamma}B$ tend vers l'infini en croissant. Choisissons dans chaque ${}^{\gamma}B_n$ un ensemble d'indiscernables pour ${}^{\beta}R$ de cardinal $\varphi_{a({}^{\beta}R)}(\#^{\gamma}B_n)$ (voir 1.1 pour la notation du poids $a({}^{\beta}R)$); appelons ces ensembles ${}^{\beta}B_n$ et posons ${}^{\beta}B = \bigcup_n {}^{\beta}B_n$. H_1 est vérifiée car le composé d'applications non décroissantes et non bornées est aussi non décroissant et non borné, tandis que H_2 est vérifiée d'après le choix des ${}^{\beta}B_n$. L'ensemble ${}^{\beta}B$ ainsi construit convient.

Supposons que β est un ordinal limite dénombrable. Soit $({}^{m}X)$ une numérotation par $\mathbf{N}$ de l'ensemble dénombrable $({}^{\alpha}B)\alpha < \beta$. Posons ${}^{m}Y = \bigcap_{n<m} {}^{n}X$. Il est facile de voir que la famille des ${}^{\alpha}B$ étant décroissante aux ensembles finis près, ${}^{m}Y$ coïncide avec l'un des ${}^{n}X$ pour $n < m$, à un ensemble fini de points près. Par suite, pour tout m, $\#\#^{m}Y$ est non décroissante pour n assez grand. Choisissons une suite d'entiers (a_m) strictement croissante telle que l'on ait $\#^{m}Y_n \geqslant m$ dès que $n \geqslant a_m$.

Pour chaque n tel que $a_m \leqslant n < a_{m+1}$ prenons dans ${}^{m}Y_n$ un sous-ensemble de cardinal m; appelons cet ensemble ${}^{\beta}B_n$, et posons ${}^{\beta}B = \bigcup_n {}^{\beta}B_n$. Par construction, $\#\#^{\beta}B$ est non décroissante et non bornée. Par ailleurs, pour tout $\alpha < \beta$, ${}^{\beta}B \dot{-} {}^{\alpha}B$ est fini; en effet, soit i le rang de ${}^{\alpha}B$ dans la numérotation de $({}^{\alpha}B)_{\alpha}$ en $({}^{M}X)$, nous avons

$$ {}^{\beta}B \dot{-} {}^{\alpha}B = {}^{\beta}B \dot{-} {}^{i}X \subset {}^{\beta}B \dot{-} {}^{i}Y \subset \bigcup_{n<a_i} \overset{-1}{h}(n). $$

L'ensemble ainsi construit ${}^{\beta}B$ convient.

Voyons maintenant comment utiliser cette suite $({}^{\alpha}B)$ pour construire $\mathfrak{D}$.

Pour tout entier k, la famille de sous-ensembles de $\mathbf{N}^k$: ${}^{k}\text{eq-}h$, $\mathbf{N}^k_+$, $({}^{\alpha}B)^k$ pour $\alpha < \aleph_1$ et $(\overset{-1}{h}(A))^k$ pour $A \in \mathfrak{U}$ (voir 1.1 pour les notations ${}^{k}\text{eq}$ et $\mathbf{N}^k_+$) engendre un filtre $\mathfrak{F}_k$ d'après l'hypothèse H_1, et ce filtre est un ultrafiltre d'après l'hypothèse H_2. Soit $({}^{\alpha}A)$ avec $\alpha < \aleph_1$ une base décroissante aux ensembles finis près de l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$, δ-stable [**6**]. La suite des ensembles $(\mathbf{N}^k_+ \cap {}^{k}\text{eq-}h \cap ({}^{\alpha}B \cap \overset{-1}{h}({}^{\alpha}A))^k)_{\alpha}$ pour $\alpha < \aleph_1$ est un base du filtre $\mathfrak{F}_k$, décroissante aux ensembles finis près. Par suite, l'ultrafiltre $\mathfrak{F}_k$ est δ-stable.

Posons $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_1$. Nous avons $h(\mathfrak{D}) = \mathfrak{U}$. De plus, pour tout entier k, la famille de sous-ensembles de $\mathbf{N}^k$: ${}^{k}\text{eq-}h$, $\mathbf{N}^k_+$ et (D^k) pour $D \in \mathfrak{D}$, engendre un ultrafiltre δ-stable, $\mathfrak{F}_k$. L'ultrafiltre ainsi construit $\mathfrak{D}$ convient pour la démonstration de 1.2.

Nous avons montré en [7] le lemme suivant:

1.3 Lemme. *Si l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur $\mathbf{N}$ est δ-stable, le filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathbf{N}^2$ engendré par (D^2) pour $D \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}^2_+$, et $({}^{2}\text{dif-}h)$ pour toutes les applications h telles que $h(\mathfrak{D})$ est libre, est l'ultrafiltre $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$.*

Nous allons le renforcer ici en

1.4 LEMME. *Soit k un entier; si l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur $\mathbf{N}$ est δ-stable, le filtre $\mathfrak{F}'_k$ sur $\mathbf{N}^k$ engendré par (D^k) pour $D \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}^k_+$, et $({}^k\text{dif-}h)$ pour toutes les applications h telles que $h(\mathfrak{D})$ est libre, est l'ultrafiltre $\bigotimes^k \mathfrak{D}$.*

PREUVE. Supposons le lemme vérifié pour un entier $k \geqslant 2$. Montrons qu'il est aussi vérifié pour l'entier $k + 1$.

Donnons-nous $R \in \bigotimes^{k+1} \mathfrak{D}$. Par définition,

$$A = \left\{x | R \cap (\{x\} \times \mathbf{N}^k) \in \{x\} \times (\otimes^k \mathfrak{D})\right\} \in \mathfrak{D}.$$

Par hypothèse de récurrence, pour chaque $a \in A$, il existe $D_a \in \mathfrak{D}$ et un ensemble d'applications (h_i) avec $i \in I_a$, I_a étant fini, tel que

$$R \cap (\{a\} \times \mathbf{N}^k) \supset \{a\} \times \left(D_a^k \cap \mathbf{N}^k_+ \cap \bigcap_{i \in I_a} ({}^k\text{dif-}h_i)\right).$$

Par définition de $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$, l'ensemble $S = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times D_a$ appartient à $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ et d'après le Lemme 1.3, pour un $D \in \mathfrak{D}$ et un ensemble d'applications (h_j) avec $j \in J$, J étant fini, nous avons

$$S \supset D^2 \cap \mathbf{N}^2_+ \cap \bigcap_{i \in J} ({}^2\text{dif-}h_j).$$

De plus, il existe d'après [2], pour toute suite dénombrable d'applications (g_i) telles que $g_i(\mathfrak{D})$ est libre pour tout i, une application g telle que $g(\mathfrak{D})$ est libre et telle que pour tout i il existe f_i vérifiant $g = f_i \circ g_i$; cette égalité entraîne ${}^k\text{dif-}g \subset {}^k\text{dif-}g_i$, car si la restriction de g à un k-uplet est injective, la restriction de g_i au même k-uplet l'est aussi d'après l'égalité $g = f_i \circ g_i$.

Prenons h tel que pour tout i appartenant à $J \cup \bigcup_{a \in A} I_a$, ${}^k\text{dif-}h \subset {}^k\text{dif-}h_i$, alors que $h(\mathfrak{D})$ est libre. Nous avons pour tout $a \in A$,

$$R \cap (\{a\} \times \mathbf{N}^k) \supset D_a^k \cap \mathbf{N}^k_+ \cap {}^k\text{dif-}h$$

et

$$\bigcup_{a \in A} \{a\} \times D_a \supset D^2 \cap \mathbf{N}^2_+ \cap {}^2\text{dif-}h,$$

soit

$$R \supset D^{k+1} \cap \mathbf{N}^{k+1}_+ \cap {}^{k+1}\text{dif-}h.$$

Le filtre $\mathfrak{F}'_k$ sur $\mathbf{N}^k$ engendré par (D^k) pour $D \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}^k_+$ et $({}^k\text{dif-}h)$ pour toutes les applications h telles que $h(\mathfrak{D})$ est libre, est visiblement contenu dans $\bigotimes^k \mathfrak{D}$; la démonstration ci-dessus montre que ce filtre est $\bigotimes^k \mathfrak{D}$, si $\mathfrak{D}$ est δ-stable.

1.5 Dans le cas où $\mathfrak{D}$ est δ-stable et admet pour image un ultrafiltre absolu $\mathfrak{U} = h(\mathfrak{D})$, pour tout g tel que $g(\mathfrak{D})$ est libre, nous pouvons trouver g' tel que $h =^{\mathfrak{D}} g' \circ g$, si bien que ${}^k\text{dif-}h \subset^{\mathfrak{D}} {}^k\text{dif-}g$.

COROLLAIRE. *Si l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est δ-stable, et si l'image de $\mathfrak{D}$ selon une application h_0 est un ultrafiltre absolu, alors, pour tout entier k, $\otimes^k \mathfrak{D}$ est engendré par (D^k) pour $D \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}_+^k$ et ${}^k\mathrm{dif}\text{-}h_0$.*

1.6 REMARQUE. Si l'ultrafiltre δ-stable $\mathfrak{D}$ a pour image un ultrafiltre absolu selon applications h_0 et h_1, ces deux applications ont même germe en $\mathfrak{D}$ [7]. Maintenant supposons que l'ultrafiltre δ-stable $\mathfrak{D}$, admette pour image non isomorphe un ultrafiltre absolu $\mathfrak{U} = h(\mathfrak{D})$ selon une application h, *indécomposable* [c'est-à-dire telle que l'égalité $h =^{\mathfrak{D}} h'' \circ h'$ entraîne que le germe de h' en $\mathfrak{D}$ ou bien celui de h'' en $h'(\mathfrak{D})$ est injectif]. Alors toutes les images de $\mathfrak{D}$ sont isomorphes à $\mathfrak{D}$ ou à $\mathfrak{U}$. En effet, soit f une application-image (libre). D'après l'alinéa 1.5, $\mathfrak{D}$ étant δ-stable et $\mathfrak{U} = h(\mathfrak{D})$ étant absolu, eq-$f \subset^{\mathfrak{D}}$ eq-h. Ensuite, l'indécomposabilité de h fait que l'inégalité ci-dessus se décompose en une alternative entre deux égalités:

$$\text{eq-}f \overset{\mathfrak{D}}{=} \{(m, n) | m = n\} \quad \text{ou} \quad \text{eq-}f \overset{\mathfrak{D}}{=} \text{eq-}h.$$

Si bien que l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ a pour seules applications-images des isomorphismes ou des applications composées de h par des isomorphismes, et ses seuls ultrafiltres-images sont des ultrafiltres isomorphes à lui-même ou à $\mathfrak{U}$.

1.7 DÉFINITIONS. Soient I un ensemble dénombrable et $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur I, $\mathfrak{D}$ sera dit 2-*affable* si toute partie R de I^2, symétrique, a même germe en $\mathfrak{D}$ qu'une combinaison booléenne (finie) de relations d'équivalence.

Exemples d'ultrafiltres 2-*affable*. Tout ultrafiltre absolu est 2-affable d'aprés la caractérisation 0.5.

Mais tout ultrafiltre 2-affable n'est pas absolu. En effet, soit $\mathfrak{D}$ l'ultrafiltre donné par la Proposition 1.2 à partir d'un ultrafiltre absolu $\mathfrak{U} = h(\mathfrak{D})$. Il est tel que le filtre $\mathfrak{F}_2$ engendré par (D^2) pour $D \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}_+^2$ et ${}^2\mathrm{eq}\text{-}h$ est un ultrafiltre. Par ailleurs, le Corollaire 1.5 nous assure que le filtre $\mathfrak{F}_2'$ engendré par (D^2) pour $D \in \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}_+^2$ et ${}^2\mathrm{dif}\text{-}h$ est également un ultrafiltre. Ainsi, l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$, δ-stable mais non absolu, est 2-affable.

1.8 DÉFINITIONS. Soit I un ensemble ordonné et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Un *filtre* $\mathfrak{F}_k$ sur I^k sera dit *symétrique* si pour tout $j \leqslant k$ et tout couple de j-uplets J et J' formés d'entiers inférieurs à k, on a pour les projections π_J et $\pi_{J'}$ qui correspondent à J et J',

$$\pi_J(\mathfrak{F}_k) = \pi_{J'}(\mathfrak{F}_k).$$

(Il est utile de remarquer qu'un ultrafiltre isomorphe à un ultrafiltre symétrique a peu de chance d'être symétrique, à moins que l'isomorphisme ne soit *par exemple* le prolongement canonique à I^k d'un isomorphisme de I.)

Notons $\mathfrak{J}_k$ l'idéal de (I^k) composé des parties de I^k que n'appartiennent à aucun ultrafiltre symétrique sur I^k. L'ensemble $I^3 \dot{-} {}^3\mathrm{dif}\text{-}h \dot{-} {}^3\mathrm{eq}\text{-}h$ par exemple appartient à $\mathfrak{J}_k$.

DÉFINITION (SUITE). Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur I sera dit *k-affable* si toute partie R de I_+^k a même germe en $\mathfrak{D}$ qu'une combinaison booléenne d'ensembles de la forme ${}^k\text{eq-}h_+$ à un élément de $\mathfrak{J}_k$ près. Un ultrafiltre sur I sera dit *affable* s'il est k-affable pour tout entier k.

Exemples d'ultrafiltres affables. Tout ultrafiltre absolu $\mathfrak{U}$ est k-affable car le seul ultrafiltre symétrique sur $\mathbf{N}_+^k$ contenant $\times_k \mathfrak{U}$ est $\otimes_k \mathfrak{U}$. Par suite, toute partie de $\mathbf{N}_+^k$ est équivalente modulo $\mathfrak{J}_k$ soit à $\mathbf{N}_+^k$ soit au vide.

De même l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ donné par la Proposition 1.3 à partir d'un ultrafiltre absolu est tel que les seules ultrafiltres symétriques sur $\mathbf{N}_+^k$ contenant $\times_k \mathfrak{D}$ sont $\otimes_k \mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{J}_k$ (voir 1.2). Ceci assure que toute partie de $\mathbf{N}_+^k$ est équivalente modulo $\mathfrak{J}_k$ soit à $\mathbf{N}_+^k$ soit à ${}^k\text{dif-}h$ soit à ${}^k\text{eq-}h$ soit au vide. Ainsi l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$, δ-stable mais non absolu est affable.

1.9 Comment obtenir maintenant un ultrafiltre affable ayant exactement l images non isomorphes deux à deux, l étant fini.

L'hypothèse H_1 qui intervient en 1.2 exprime comment eq-h et eq-id (où id désigne l'identité) doivent différer pour qu'il soit possible de trouver un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ où les germes de eq-h et de eq-id sont distincts.

Cette hypothèse va être renforcée afin d'exprimer que "l" applications sont suffisamment différentes.

1.10 *Hypothèse de foisonnement* (*dans le case l fini*). Soient $h_1, \ldots, h_l$, l applications finijectives vérifiant eq-$h_1 \supset$ eq-$h_2 \supset \cdots \supset$ eq-h_l = eq-id.

Considérons l'*arbre A* dont les noeuds sont des entiers et dont les arêtes relient deux noeuds n et n' de hauteur i et $i + 1$ si et seulement si

$$\overset{-1}{h}_i(n) \cap \overset{-1}{h}_{i+1}(n') \neq \varnothing.$$

Si $X \subset \mathbf{N}$, nous notons $A \upharpoonright X$ le sous arbre de A dont toutes les branches ont pour hauteur l et dont les noeuds de hauteur l sont les éléments de X. Nous dirons que l'arbre $A \upharpoonright X$ *m-foisonne* jusqu'à la hauteur l s'il contient un sous-arbre où chaque noeud de hauteur i avec $1 \leq i < l$ est le départ d'au moins m arêtes. Notons $A_n \upharpoonright X$ le sous-arbre maximal de $A \upharpoonright X$ ayant pour seul noeud de hauteur 1 l'entier n. Soit φ l'application qui à n fait correspondre le plus grand entier m tel que $A_n \upharpoonright X$ m-foisonne. Si φ est non décroissante et non bornée, nous dirons que l'arbre $A \upharpoonright X$ *foisonne* jusqu'à la hauteur l.

1.11 THÉORÈME. *Si l'hypothèse du continu est vérifiée, il existe pour tout entier l des ultrafiltres affables ayant exactement l images non isomorphes.*

PREUVE. Donnons-nous ${}^{\alpha}B \subset \mathbf{N}$ et supposons que l'arbre $A \upharpoonright {}^{\alpha}B$ foisonne. Soit $R \subset \mathbf{N}^k$. Il existe ${}^{\alpha+1}B$ tel que pour tout $i \leq l - 1$, les éléments de ${}^{\alpha+1}B_+^k \cap {}^k\text{eq-}h_i \cap {}^k\text{dif-}h_{i+1}$ soient indiscernables par R, et tel que l'arbre $A \upharpoonright {}^{\alpha+1}B$ foisonne jusqu'à la hauteur l. Ceci se montre par récurrence sur l en employant le lemme rectifiant 1.12 qui renforce le lemme de Ramsey employé en 1.2 dans le cas $l = 2$. Ceci une fois démontré, la démonstration du Théorème 1.11 pour l fini > 2 se conduit de même façon que la démonstration de la Proposition 1.2 à partir du lemme de Ramsey.

1.12 LEMME RECTIFIANT. *Il existe une application* ρ_k: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *croissante et non bornée, telle que, si l'ensemble* A *est réunion d'ensembles disjoints* A_i *pour* $i \in I$, *avec* $\# I = m$ *et avec pour tout* i, $\# A_i = m$, *alors, quel que soit* $R \subset A^k$, *il existe* $J \subset I$ *et pour tout* $j \in J$ *il existe* $B_j \subset A_j$, *avec* $\# J = \rho_k(m)$ *et avec pour tout* $j \in J$, $\# B_j = \rho_k(m)$, *tels que d'une part*

$$\text{ou bien} \quad \bigcup_{j \in J} (B_j)^k_+ \subset R \quad \text{ou bien} \quad \bigcup_{j \in J} (B_j)^k_+ \cap R = \emptyset,$$

et tels que d'autrepart,

$$\text{ou bien} \quad \bigcup_{(j_1, \ldots, j_k) \in J^k_+} B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \subset R$$

$$\text{ou bien} \quad \bigcup_{(j_1, \ldots, j_k) \in J^k_+} B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \cap R = \emptyset.$$

PREUVE. (Passablement analogue à la démonstration populaire du lemme de Ramsey.)

Soient A et B deux ensembles de cardinalité m. Soit $R \subset A \times B$. Il existe n et deux ensembles A' et B' de cardinalité n vérifiant $2^{2n} \times n > m$, $A' \subset A$, $B' \subset B$ et $A' \times B' \subset R$ à moins que $A' \times B' \cap R = \emptyset$.

D'une façon plus générale, il existe une application φ'_k: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante (au sens large) et non bornée telle que pour tout k-uplet d'ensembles A_i, chacun des A_i étant de cardinalité m, et tout $R \subset \times_i A_i$, il existe un k-uplet d'ensembles A'_i vérifiant d'une part, pour tout i, card $A_i = \varphi'_k(m)$ et d'autre part $\times_i A'_i \subset R$ ou bien $\times_i A'_i \cap R = \emptyset$.

Le lemme de Ramsey sous sa forme finitiste est le transformé de l'énoncé précédent en vue d'obtenir $A' = B'$. Nous notons, comme en (1.2), φ_k, l'application jouant dans ce cas le rôle de φ'_k.

Par souci de simplification, posons $\psi_k = \inf(\varphi_k, \varphi'_k)$. Soit θ une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, nous désignons par $\psi_k^{[\theta]}$ l'application qui à $m \in \mathbf{N}$ fait correspondre l'entier $\psi_k^{[\theta(m)]}(m)$, $\psi_k^{[s]}$ désignant l'itéré s fois de l'application ψ_k. Il est possible de choisir θ croissante et non bornée de façon que l'on ait $\psi_k^{[\theta^k]} > \theta$, nous allons le montrer. Une suite d'entiers (m_n) est définie par récurrence en prenant pour m_n le plus petit entier m tel que $\psi_k^{[n^k]}(m)$ soit supérieur à n. Le fait que l'application $\psi_k^{[n^k]}$ soit non bornée assure l'existence de cette suite (m_n). Le fait que l'application soit croissante assure que l'on a l'inégalité $\psi_k^{[n^k]}(m) > n$ dès que m est supérieur à m_n. On associe à cette suite (m_n) une suite strictement croissante (t_n) en posant $t_n = n + \sup_{p<n} m_p$, et on définit

l'application θ par cas en posant $\theta(m) = n + 1$ si $t_n \leqslant m < t_{n+1}$. Cette application fournit l'exemple recherché, car elle est croissante et non bornée et vérifie $\psi_k^{[\theta^k]} \geqslant \theta$. Nous voici, numériquement parlant, au bout de nos peines.

Considérons maintenant l'entier m et les ensembles A, A_i, I, R donnés au départ.

Prenons dans chaque A_i un ensemble d'indiscernables par R, A_i', de cardinal $\psi_k(m)$. Pour un ensemble I', vérifiant $I' \subset I$ et $\# I < 2\,(\# I')$, nous avons

$$\text{ou bien} \quad \bigcup_{i \in I'} (A_i)_+^k \supseteq R \quad \text{ou bien} \quad \bigcup_{i \in I'} (A_i)_+^k \cap R = \varnothing.$$

Prenons arbitrariement dans I' un sous-ensemble K de cardinalité $\theta(m)$. Numérotons par $\theta(m)^k$ l'ensemble des k-uplets de K, puis extrayons successivement pour $l < \theta(m)^k$ des ensembles A_i^l vérifiant pour chaque i, $A_i^0 = A_i'$, $A_i^{l+1} \subset A_i^l$, $\# A_i^{l+1} = \psi_k(\# A_i^l)$ et, si l est le rang du k-uplet d'éléments distincts de K, $(j_1, \ldots, j_k)$,

$$A_{j_1}^l \times \cdots \times A_{j_k}^l \subset R \text{ à moins que } A_{j_1}^l \times \cdots \times A_{j_k}^l \cap R = \varnothing.$$

D'après le choix numérique de θ, nous pouvons extraire de chacun des ensembles $A_j^{\theta^k(m)}$, pour $j \in K$, un ensemble B_j de cardinalité $\theta(m)$ de façon que pour tout k-uplet d'éléments distincts de K, $(j_1, \ldots, j_k)$, nous ayons

$$B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \subset R \quad \text{ou} \quad B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \cap R = \varnothing.$$

Soit maintenant S le sous-ensemble de K_+^k obtenu en posant $(j_1, \ldots, j_k) \in S$ si $B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \subset R$. D'après le lemme de Ramsey, il existe un sous-ensemble J de K de cardinalité $\psi_k \circ \theta(m)$, composé d'indiscernables par S. Pour les ensembles J et $(B_j)_{i \in J}$ ainsi choisis, nous aurons

$$\bigcup_{(j_1, \ldots, j_k) \in J_+^k} B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \subset R$$

ou

$$\bigcup_{(j_1, \ldots, j_k) \in J_+^k} B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_k} \cap R = \varnothing.$$

Il suffit dès lors de poser $\rho_k = \psi_k \circ \theta$ et le lemme est démontré.

2. Tout ultrafiltre range est δ-stable.

2.1 Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur $\mathbf{N}$ est δ-stable dès que le filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathbf{N}^2$ engendré par (D_+^2) pour $D \in \mathfrak{D}$, et ^{2}dif-h pour toute application h telle que $h(\mathfrak{D})$ est libre, est un ultrafiltre.

C'est la réciproque du Lemme 1.3. Cette réciproque a été démontrée pour la première fois par Labib Haddad. La Proposition 2.2 que nous allons démontrer et qui entraînera cette réciproque utilise l'idée de cette première démonstration. Nous montrerons ensuite que tout ultrafiltre 2-affable, et par suite tout ultrafiltre affable, est δ-stable.

2.2 Proposition. *Soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ deux ultrafiltres sur* $\mathbf{N}$ *et soit h une application de germe ni finijectif ni constant en $\mathfrak{E}$. Dans ce cas, chacun des deux ensembles $\{(m, n) | m < h(n)\}$ et $\{(m, n) | h(n) < m < n\}$ rencontre le filtre sur* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *engendré par $\{A \times B | A \in \mathfrak{D}$ et $B \in \mathfrak{E}\}$, $(\{(m, n) | f(m) \neq f(n)\})_f$ pour f de germe non constant en $\mathfrak{E}$, et* $\mathbf{N}^2_+$.

Preuve. Forcément, $\{(m, n) | m < h(n)\}$ vérifie la condition ci-dessus, puisqu'il appartient à $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E}$.

Par ailleurs, il est facile de voir que $\{(m, n) | h(n) < m < n\}$ est compatible avec le filtre $\mathfrak{D} \times \mathfrak{E}$ car, quel que soit $B \in \mathfrak{E}$, il existe d tel que $B \cap h^{-1}(d)$ est infini, et la réunion des intervalles $]h(b), b[$ pour $b \in B \cap h^{-1}(d)$ est tout $\mathbf{N}$, à un nombre fini de points près.

Supposons maintenant que

$$\{(m, n) | h(n) < m < n\} \cap A \times B \cap \bigcap_{i<k} \{(m, n) | f_i(m) \neq f_i(n)\} = \emptyset$$

pour k entier, $A \in \mathfrak{D}$ et $B \in \mathfrak{E}$. Autrement dit, supposons que

$$(*) \quad \{(m, n) | h(n) < m < n\} \cap A \times B \subset \bigcup_{i<k} \{(m, n) | f_i(m) = f_i(n)\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe $A'' \in \mathfrak{D}$, $B'' \in \mathfrak{E}$ tel que

$$\{(m, n) | h(n) < m < n\} \cap A'' \times B'' \subset \bigcup_{i<k'} \{(m, n) | f_i'(m) = f_i'(n)\}$$

où la famille des f_i' est une sous-famille des f_i et où k' est strictement inférieur à k. Ainsi par récurrence nous nous ramènerons au cas simple ($k = 0$) où l'égalité $\{(m, n) | h(n) < m < n\} \cap A''' \times B''' = \emptyset$ est impossible; l'hypothèse est absurde.

Soit d un entier tel que $B \cap h^{-1}(d)$ soit infini. Posons $C = B \cap h^{-1}(d)$. Soit D une partie infinie de C. Posons $A' = A \cap \{m | m > d\}$ et prenons $m \in A'$. Pour tout n assez grand appartenant à D nous avons $h(n) < m < n$, et donc d'après $(*)$ nous avons $f_j(n) = f_j(m)$ pour un $j < k$. L'ensemble D étant infini et k étant fini, pour au moins un $i < k$, $\{n | n \in D$ et $f_i(n) = f_i(m)\}$ est infini. Soit $\varphi(D, m)$ le plus petit des entiers $i < k$ vérifiant cette propriété.

Soit (m_k) une énumération de A'. Nous allons définir une application ψ de domaine A' et une suite (C_k) de parties infinies de $\mathbf{N}$ en posant

$$C_0 = C \quad \text{et} \quad \psi(m_0) = \varphi(C_0, m_0),$$
$$C_{k+1} = C_k \cap f^{-1}_{\psi(m_k)}(m_k) \quad \text{et} \quad \psi(m_{k+1}) = \varphi(C_{k+1}, m_{k+1}).$$

L'application ψ est de germe constant en $\mathfrak{D}$. Il existe $A'' \in \mathfrak{D}$, $A'' \subset A$ et $i_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $a \in A''$, $\psi(a) = i_0$.

Prenons m et $m' \in A''$. Il existe $n > \sup(m, m')$ tel que $f_{i_0}(m) = f_{i_0}(n) = f_{i_0}(m')$, si bien que f_{i_0} est constante sur A''. Soit n_0 l'entier tel que pour tout $a \in A''$, $f_{i_0}(a) = n_0$.

L'application f_{i_0} est supposée de germe non constant en $\mathfrak{S}$. Posons $B'' = \{n | f_{i_0}(n) > n_0\}$. Nous avons $B'' \in \mathfrak{S}$ et

$$\{(m, n) | h(n) < m < n\} \cap A'' \times B'' \subset \bigcup_{\substack{i<k \\ i \neq i_0}} \{(m, n) | f_i(m) = f_i(n)\}.$$

Nous nous retrouvons donc dans la situation antérieure mais avec un nombre moindre de f_i.

Le raisonnement par récurrence donné plus haut nous assure que l'hypothèse est absurde.

2.3 Corollaire. *Si l'ultrafiltre $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{S}$ est engendré par $(A \times B)$ pour $A \in \mathfrak{D}$ et $B \in \mathfrak{S}$, $\{(m, n) | n > m\}$ et $\{(m, n) | f(m) \neq f(n)\}_f$ pour f de germe non constant et $\mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{S}$ est δ-stable.*

2.4 Corollaire [1]. *Si deux ultrafiltres $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{S}$ sur $\mathbf{N}$ sont tels qu'il n'existe que deux ultrafiltres $\mathfrak{U}$ sur $\mathbf{N}^2$ tel que $\pi_1(\mathfrak{U}) = \mathfrak{D}$ et $\pi_2(\mathfrak{U}) = \mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{S}$ sont δ-stables.*

2.5 Corollaire. *Tout ultrafiltre k-affable est δ-stable.*

Preuve. Soit $R \in \otimes^k \mathfrak{D}$. L'ultrafiltre $\otimes^k \mathfrak{D}$ étant symétrique, on a $\otimes^k \mathfrak{D} \cap \mathfrak{J}_k = \emptyset$, et pour tout $I \in \mathfrak{J}_k$, $R \triangle I \in \otimes^k \mathfrak{D}$. L'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ étant k-affable, il existe $I \in \mathfrak{J}_k$ tel que $R \triangle I$ est combinaison booléenne de relations d'équivalence. Comme ^{k}dif-h appartient à $\otimes^k \mathfrak{D}$ dès que h est de germe non constant en $\mathfrak{D}$, on a $R \triangle I \supset \bigcap_{j \in J}$dif-$h_j$ avec J fini et de germe non constant en $\mathfrak{D}$.

Pour tout $i \leqslant k - 1$ et $j \in J$, posons

$$f_{i,j} \upharpoonright \mathbf{N} = h_j \quad \text{et} \quad f_{i,j} \upharpoonright \mathbf{N}^{k-1} = h_j \circ \pi_i,$$

où π_i est la $i$ème projection de $\mathbf{N}^{k-1}$ sur $\mathbf{N}$. Nous avons

$$\bigcap_{i \leqslant k-1} \text{dif-}f_{i,j} = {}^k\text{dif-}h_j,$$

si bien que l'ultrafiltre $\otimes^k \mathfrak{D}$ est engendré par $\otimes^{k-1} \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ et les dif-f pour f de germe non constant en $\mathfrak{D}$. D'après 2.3, l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est δ-stable.

Dans le cas où $\mathfrak{S}$ est δ-stable, l'expression du produit tensoriel $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{S}$ à l'aide des dif-h est pratique. Peut-on espérer que si $\mathfrak{U} = f(\mathfrak{D}) = f(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{S}$ étant deux ultrafiltres sur les ensembles I et J respectivement, les ensembles $\mathfrak{D} \times \mathfrak{S}$, $\mathbf{N}^2_+$, eq-f et tous les dif-h (compatibles) engendrent un ultrafiltre $\mathcal{G}$

sur $I \times J$? Notre connaissance des ultrafiltres sur $I \times J$ plus fins que le filtre $\mathfrak{D} \times \mathfrak{E}$, serait dans ce cas grandement améliorée. Telle est l'étude que nous allons entreprendre maintenant.

2.6 Définition. Soient I et J deux ensembles et $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ deux ultrafiltres respectivement sur I et J. Soient f et g deux applications de J dans I vérifiant $f(\mathfrak{E}) = g(\mathfrak{E}) = \mathfrak{D}$. Nous appellerons *système égalisateur* en $\mathfrak{D}$ du triplet $(\mathfrak{E}, f, g)$ l'ensemble des germes en $\mathfrak{D}$ d'applications h telles que $h(\mathfrak{D})$ soit libre et $h \circ f \overset{\mathfrak{E}}{=} h \circ g$.

Notons que si h et h' appartiennent au système égalisateur en $\mathfrak{D}$ du triplet $(\mathfrak{E}, f, g)$–appelons le **E**–alors toute application h'' telle que

$$\text{eq-}h'' \overset{\mathfrak{D}}{\supset} \text{eq-}h \cap \text{eq-}h'$$

appartient également à **E** car $h \in \mathbf{E}$ signifie eq-$h \in (f, g)(\mathfrak{E})$. Notons qu'un système égalisateur peut être vide; c'est le cas du système égalisateur de $(\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}, \pi_1, \pi_2)$, où π_1 et π_2 sont les projections.

Définition (suite). Soit k un entier, soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur **N** et soit **E** un système égalisateur en $\mathfrak{D}$. Notons $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ le filtre sur $\mathbf{N}^k$ engendré par (D^k_+) pour $D \in \mathfrak{D}$, $({}^k\text{eq-}h)$ pour $h \in \mathbf{E}$ et $({}^k\text{dif-}f)$ pour $f \notin \mathbf{E}$. L'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sera dit *k-rangé* si pour tout **E**, $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ est un ultrafiltre. Dans ce cas le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ sera noté $\otimes^k_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$ par analogie avec $\otimes^k \mathfrak{D} = \otimes^k_{\varnothing} \mathfrak{D}$. Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur **N** est *rangé* s'il est k-rangé pour tout entier k.

Notons que tout ultrafiltre m-rangé est h-rangé pour tout $h \leqslant m$. Nous allons maintenant comparer les notions d'ultrafiltres rangés et affables.

2.7 Proposition. *Soit m un nombre entier. Tout ultrafiltre h-affable pour $h \leqslant m$ est m-rangé.*

Preuve. Supposons le contraire. Soit k le plus petit entier m tel qu'il existe un ultrafiltre qui n'est pas m-rangé tout en étant néanmoins h-affable pour tout $h \leqslant m$. Soit $\mathfrak{D}$ un tel ultrafiltre et soient **E** un système égalisateur et R une partie de $\mathbf{N}^k$ compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ mais n'y appartenant pas. L'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ étant k-affable, nous pouvons écrire R sous la forme $R = R' + J$ où J est un élément de $\mathfrak{F}_k$, et où

$$R' = \bigcup_{i<n} R_i \quad \text{avec } R_i = {}^k\text{eq-}h_{i,1} \cap {}^k\text{eq-}h_{i,2} \cap \cdots \cap {}^k\text{dif-}g_{i,m} \cap \mathbf{N}^k_+,$$

car $\mathbf{N}^k \dot{-} {}^k\text{dif-}g \dot{-} {}^k\text{eq-}g$ appartient à $\mathfrak{F}_k$.

Supposons que l'élément J de $\mathfrak{F}_k$ ne soit pas compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Dans ce cas, $R' - J$ serait compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Mais si R' est compatible avec le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$, alors au moins un R_i est compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ et donc chacun des eq-$h_{i,j}$ et dif-$g_{i,m}$ intervenant dans R_i est compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Or de tels ensembles ne sont compatibles avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ que s'ils y appartiennent. Aussi, R'

appartiendrait à $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$, et $R = R' + J$ aussi car J est supposé non compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Contradiction.

L'élément J de $\mathfrak{F}_k$ est donc nécessairement compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Or J est réunion finie d'ensembles S_i de projections disjointes, c'est à dire vérifiant chacun

$$\pi_J(S_i) \cap \pi_{J'}(S_i) = \varnothing,$$

où J et J' sont deux sous-ensembles de $k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ de même puissance et où π_J et $\pi_{J'}$ sont les projections correspondantes. Il existe donc un entier $h = \# J < k$ et deux sous-ensembles de $\mathbf{N}^h$ compatibles avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},h}$, mais n'y appartenant pas puisqu'ils sont disjoints. Mais ceci montrerait que $\mathfrak{D}$ n'est pas h-rangé et contredit l'hypothèse faite sur k. Il n'existe donc pas d'entier m tel qu'un ultrafiltre h-affable pour tout $h < m$ puisse ne pas être m-rangé. La démonstration est finie.

J'ai montré dans ma thèse que la réciproque de 2.7 est juste dans le cas particulier où l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ n'a qu'un nombre fini d'images non isomorphes deux à deux. Depuis, Blass a successivement donné une trés jolie démonstration de cette réciproque ne nécessitant pas la clause "$\mathfrak{D}$ n'a qu'un nombre fini d'images non isomorphes" puis une démonstration du fait que cette clause n'est pas restrictive en montrant que si $\mathfrak{D}$ est 2-affable, le nombre d'ultrafiltres contenant le filtre $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ est fini [3']. Je donne ici la preuve initiale.

2.8 Théorème. *Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre n'admettant qu'un nombre fini d'applications-images non isomorphes deux à deux; quel que soit l'entier k, si $\mathfrak{D}$ est k-rangé, il est également k-affable.*

Preuve. Supposons que $\mathfrak{D}$ n'ait qu'un nombre fini d'applications-images non isomorphes deux à deux. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de relations d'équivalence de germes distincts en $\mathfrak{D}$, si bien que tout système égalisateur $\mathbf{E}$ est réduit soit à $\varnothing$, soit est engendré par un eq-h car l'intersection d'un nombre fini de germes de relation d'équivalence appartenant à $\mathbf{E}$ est le germe en $\mathfrak{D}$ d'une relation d'équivalence appartenant à $\mathbf{E}$. Le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ se compose de $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, $\mathbf{N}^k_+$, ^{k}eq-h et ^{k}dif-g pour tout g tel que eq-$h \not\subset^{\mathfrak{D}}$ eq-g. C'est un ultrafiltre si $\mathfrak{D}$ est k-rangé. Ainsi, faisons choix d'un ensemble maximal de h_i tels que les germes en $\mathfrak{D}$ des eq-h_i soient tous différents. Les sous-ensembles de la forme R_i avec

$$R_i = {}^k\text{eq-}h_i \mathbin{\dot{-}} \left(\bigcup_j {}^k\text{eq-}h_j \right) \quad \text{pour tout } j \text{ tel que eq-}h_i \overset{\mathfrak{D}}{\not\subset} \text{eq-}h_j$$

constituent une partition de $\mathbf{N}^k$ telle que chacun des filtres engendrés par $\times^k \mathfrak{D}$ et $R_i \cap \mathbf{N}^k_+$ soit un ultrafiltre. L'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est k-affable.

2.9 *Résumé* (*utilisant* [3′]).

(i) Un ultrafiltre est 2-rangé si et seulement si il est 2-affable.

(ii) Un ultrafiltre est rangé si et seulement il est affable.

(iii) Si un ultrafiltre est 2-rangé, il est aussi δ-stable.

2.10 Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur **N**, isomorphe à $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}'$, où $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ sont deux ultrafiltres absolus. Soient h et g les deux applications canoniques telles que $\mathfrak{U} = h(\mathfrak{D})$ et $\mathfrak{U}' = g(\mathfrak{D})$. Pour tout k, le filtre associé à un système égaliseur en $\mathfrak{D}$, non vide, est un ultrafiltre tandis qu'il existe $(2k)!/k!2^k$ ultrafiltres différents contenant le filtre $\mathfrak{F}_k$ associé au système égaliseur vide. (Le nombre $(2k)!/k!2^k$ est obtenu en observant qu'à tout ordre total entre les éléments $h \circ \pi_i$ et $g \circ \pi_j$ vérifiant $h \circ \pi_i < g \circ \pi_i$ pour tout $i \leqslant k$ et $\pi_i < \pi_j$ si $i < j$ est associé un seul ultrafiltre contenant $\mathfrak{F}_k$.)

2.11 Les ultrafiltres non δ-stables $\mathfrak{D} = \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}'$, où $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ sont deux ultrafiltres absolus, semblent, à première vue, satisfaire la notion intuitive ayant servi de point de départ à l'étude des ultrafiltres rangés, car la connaissance des images de $\mathfrak{D}$ entraîne quasiment la connaissance des ultrafiltres contenant le filtre $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, si bien que le résultat 2.9 en excluant $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}'$ m'est apparu au début comme un constat d'échec dans ma tentative de description formelle de cette classe d'ultrafiltres. Nous verrons en §5 comment, en fait, un affaiblissement naturel de la notion d'ultrafiltre rangé permet d'inclure dans notre étude les ultrafiltres de la sorte $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}'$ avec $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ absolus.

3. Tout ultrafiltre δ-stable n'est pas 2-rangé.

3.1 *Notation.* Soit βI l'ensemble des ultrafiltres sur I. Nous désignerons par τ l'application $\beta(\mathbf{N}^2) \to \beta\mathbf{N} \times \beta\mathbf{N}$ définie par $\tau(\mathfrak{S}) = (\pi_1(\mathfrak{S}), \pi_2(\mathfrak{S}))$ où π_1 et π_2 sont les deux projections de $\mathbf{N}^2$ sur **N**.

3.2 Théorème. *Soit n un nombre entier. Si un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur* **N** *possède n applications-images non isomorphes et n au plus, alors,*

$$\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) \geqslant 2n + 1.$$

L'égalité est obtenue si et seulement si $\mathfrak{D}$ est 2-affable. Plus généralement, le nombre d'ultrafiltres symétriques contenant le filtre $\times^k \mathfrak{D}$ est au moins $k!n + 1$, l'égalité étant obtenue si et seulement si $\mathfrak{D}$ est k-affable.

Preuve. Nous avons montré en [7] que si deux applications-images f et g de $\mathfrak{D}$ sont non isomorphes, l'ensemble $(\text{eq-}f \dot{-} \text{eq-}g) \cup (\text{eq-}g \dot{-} \text{eq-}f)$ est compatible avec le filtre $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Nous avons également montré en [7] que si pour un ensemble fini I, chacun des $(\text{eq-}f \dot{-} \text{eq-}g_i)$ pour $i \in I$ est compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, alors $\text{eq-}f \dot{-} \bigcup_{i \in I} \text{eq-}g_i$ est aussi compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$.

Soient $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$, $n + 1$ applications de germes en $\mathfrak{D}$ non isomorphes deux à deux; l'une de ces applications est de germe constant d'après l'hypothèse. Chacun des eq-h_i est compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Nous allons restreindre ces ensembles eq-h_i dans la mesure du possible en substituant à eq-h_i, eq-$h_i \dot{-} \bigcup_{m \in I_i}$eq-$h_m$ pour tout $m \leqslant k$ tel que eq-$h_i \dot{-}$ eq-h_m est compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Il se peut que I_i soit vide et c'est le cas si h_i est un isomorphisme. Quoiqu'il en soit, si $i \neq j$, les ensembles

$$A_i = \text{eq-}h_i \dot{-} \bigcup_{m \in I_i} \text{eq-}h_m \quad \text{et} \quad A_j = \text{eq-}h_m \dot{-} \bigcup_{n \in I_j} \text{eq-}h_m$$

sont disjoints. En effet, si $i \neq j$, eq-$h_i \dot{-}$ eq-h_j ou sinon eq-$h_j \dot{-}$ eq-h_i est compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, si bien que, soit $j \in I_i$, soit $i \in I_j$; et dans les deux cas, les ensembles A_i et A_j sont disjoints et compatibles avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$.

Dans le lot des A_i, nous retrouvons la diagonale correspondant à un isomorphisme en $\mathfrak{D}$. A part la diagonale, chacun des A_i donnera deux ensembles disjoints $A_i \cap \{(x, y) | x > y\}$ et $A_i \cap \{(x, y) | x < y\}$ compatibles avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Nous obtenons ainsi $2n + 1$ ultrafiltres $\mathfrak{E}$ différents appartenant à $\overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$.

Si l'on veut que $\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 2n + 1$, il faut que chacun des filtres engendrés par A_i, $\{(x, y) | x < y\}$ et $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ soit un ultrafiltre. En d'autres termes, il faut que chaque $R \subset \mathbf{N}^2$ soit, en germe, combinaison booléenne de $\{(x, y) | x < y\}$ et de (eq-h_i), c'est à dire que $\mathfrak{D}$ soit 2-affable.

Réciproquement, si $\mathfrak{D}$ est 2-affable, pour chaque $R \subset \mathbf{N}_+^2$ il existe un $D \in \mathfrak{D}$ tel que $R \cap D^2$ est combinaison booléenne de $\mathbf{N}_+^2 = \{(x, y) | x < y\}$ et de eq-h_i, c'est à dire réunion d'un nombre fini d'expressions finies de la forme

$$\mathbf{N}_+^2 \cap \bigcap_{i \in I} \text{eq-}h_i \cap \bigcap_{j \in J} \left(\mathbf{N}^2 - \text{eq-}h_j\right).$$

Mais l'intersection d'un nombre fini de eq-h_i est un eq-h (peut-être $\mathbf{N}^2$). Nous retombons ainsi sur la partition obtenue en début de preuve, et par suite, $\overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 2n + 1$.

Plus généralement, nous allons montrer que le filtre $\mathfrak{F}_i$ engendré par $\times^k \mathfrak{D}$ et $\{(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})\colon (m < n < k) \to (x_m, x_n) \in A_i\}$ est contenu dans un ultrafiltre symétrique en montrant qu'il ne rencontre pas l'ideal $\mathfrak{I}_k$ (1.8) engendré par la famille $\mathfrak{B}_k$ des sous-ensembles de $\mathbf{N}^k$ à projections disjointes.

Notations. Soit $S \subset N^h$ et k un entier supérieur à h. Posons $T(S, k) = \{(x_0, \ldots, x_{k-1})\colon (i_0 < i_1 < \cdots < i_{h-1} < k) \to (x_{i_0}, \ldots, x_{i_{h-1}}) \in S\}$. Nous dirons qu'un sous ensemble S de $\mathbf{N}^h$ possède la *propriété f* si pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $X \subset \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\# X = n$ et $X_+^h \subset S$. Dans cette preuve, nous noterons θ l'application définie sur l'ensemble $\mathfrak{B}_k$ des sous-ensembles de $\mathbf{N}^k$ à projections disjointes par: $\theta(B)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe deux sous-ensembles de k, J et J' vérifiant $\# J = \# J' = n$ et $\pi_J(B) \cap \pi_{J'}(B) = \varnothing$.

Supposons que $T(A_i \cap D^2, k)$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{J}_k$. Ceci s'écrit $T(A_i \cap D^2, k) \subset \bigcup_{u \in U} B_u$ avec $B_u \in \mathfrak{B}_k$ et U fini. Soit h l'inf des $\theta(B_u)$ pour $u \in U$.

Si $h = 1$, soit (D_b) la partition de D la plus fine obtenue à partir des B_u avec les projections $\mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$. Une des cellules, appelons la D_a, appartient à $\mathfrak{D}$. Pour tout u tel que $\theta(B_u) = 1$, deux projections de B_u sont disjointes et ne peuvent donc contenir simultanément D_a; l'une d'elle évite donc D_a d'après le choix de la partition (D_b), et l'on a $T(A_i \cap D_a^2, k) \cap B_u = \varnothing$ dès que $\theta(B_u) = 1$. Si $h \neq 1$, nous avons le Lemme 3.3.

3.3 Lemme. *Soit $S \subset \mathbf{N}^h$ possédant la propriété f. Supposons qu'une famille finie d'éléments de $\mathfrak{B}_k$ vérifie $T(S, k) \subset \bigcup B_u$ pour $u < v$ et $h \leqslant \theta(B_u)$. Alors il existe $S_a \subset S$ tel que S_a vérifie d'une part la propriété f et d'autre part $T(S_a, k) \subset \bigcup B_u$ pour $u \leqslant v$ et $h + 1 \leqslant \theta(B_u)$.*

Preuve. Soit $(S_b)_b$ la partition la plus fine de S réalisée par les projections π_J avec $\# J = h$ à partir des ensembles B_u vérifiant $u < v$ et $\theta(B_u) = h$. Cette partition étant finie, au moins une des cellules, par exemple S_a, vérifie la propriété f d'après le théorème de Ramsey finitiste. Donnons nous $u < v$ tel que $\theta(B_u) = h$. Ou bien il existe J tel que

$$\# J = h \quad \text{et} \quad S_a \cap \pi_J(B_u) = \varnothing,$$

et l'on a dans ce cas

$$T(S_a, k) \cap B_u = \varnothing.$$

Ou bien, pour tout J tel que $\# J = h$, on a $S_a \cap \pi_J(B_u) \neq \varnothing$; mais d'après le choix de $(S_b)_b$ il faudrait que l'on ait pour tout J tel que $\# J = h$, $S_a \subset \pi_J(B_u)$, ce qui est impossible car $\theta(B_u) = h$. On a donc $T(S_a, k) \subset \bigcup B_u$ pour $u < v$ et $h + 1 \leqslant \theta(B_u)$.

Suite de la preuve de 3.2. L'application répétée du lemme ci-dessus nous donne l'existence de $R \subset D^{k-1}$ possédant la propriété f et tel que $T(R, k) = \varnothing$! Mais ceci est impossible car il existe X vérifiant $\# X = k$ et $X^{k-1} \subset R$ ce qui entraine $T(R, k) \neq \varnothing$. Quel que soit l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$, aucun filtre $\mathfrak{F}_i$ ne rencontre l'idéal $\mathfrak{J}_k$. Soit σ une permutation de k; chaque filtre $\mathfrak{F}_i$ est compatible avec $\{x_0, \ldots, x_{k-1}: x_{\sigma(0)} < \cdots < x_{\sigma(k-1)}\}$ si bien que si $\mathfrak{D}$ a n applications images, alors $\times^k \mathfrak{D}$ est contenu dans au moins $n \times k! + 1$ ultrafiltres symétriques.

Le cas limite est obtenu exactement comme dans le cas $k = 2$.

A. Blass introduit en [3] la notion d'ultrafiltre faiblement Ramsey:

Définition. $\mathfrak{G}$ est *faiblement Ramsey* si pour toute partition de $\mathfrak{P}_2(\mathbf{N})$ (voir notations en (1.1)) en trois parts, il existe un $A \in \mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{P}_2(A)$ soit contenu dans l'union de deux de ces parts.

3.4 PROPOSITION. *Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est faiblement Ramsey si et seulement si* $\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 3$ *ou* 5.

Ce résultat a été démontré par A. Blass et l'auteur lors d'une discussion. A. Blass a donné ensuite une preuve plus courte que voici.

PREUVE. L'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est faiblement Ramsey si, à toute partition de $\mathcal{P}_2(\mathbf{N})$ en trois parts, correspond un $D \in \mathfrak{D}$ tel que $\mathcal{P}_2(D)$ est disjoint de l'une des parts, autrement dit, si seulement deux éléments de la partition donnent des sous ensembles de $\mathbf{N}_+^2$ compatibles avec les filtres $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Si bien que le filtre engendré par $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ et $\mathbf{N}_+^2$ est contenu dans au plus deux ultrafiltres, et, le filtre $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ est contenu dans au plus cinq ultrafiltres.

A. Blass montre en **[3]** qu'un ultrafiltre faiblement Ramsey non Ramsey ne possède que deux applications images. Ce résultat s'obtient aussi en remarquant que $\mathfrak{D}$ a au moins deux applications images, car s'il n'en avait qu'une il serait absolu et $\overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$ compterait trois éléments, et au plus deux, d'après la formule donnée en (3.2). Ainsi, dans le cas $\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 5$, le nombre d'applications-images de $\mathfrak{D}$ est imposé.

La généralisation naturelle de la notion d'ultrafiltre faiblement Ramsey, proposée par Blass est:

3.5 DÉFINITION. $\mathfrak{D}$ est *k-faiblement Ramsey* si $\mathfrak{D}$ n'est pas n-faiblement Ramsey pour un $n < k$ et si à toute partition de $\mathcal{P}_2(N)$ en $k + 1$ parts, correspond $A \in \mathfrak{D}$ avec $\mathcal{P}_2(A)$ contenu dans seulement k parts. Dès lors, par la même démonstration qu'en 3.4, "$\mathfrak{D}$ est k faiblement Ramsey" équivaut à "$\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 2k + 1$".

Il n'est pas fait mention du nombre d'images de $\mathfrak{D}$, et il existe des ultrafiltres non δ-stables $\mathfrak{D}_0$ tels que $\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0) = 2k_0 + 1$ (les nombres sont impairs pour des raisons de symétrie **[1]**) (un exemple est donné en 2.10). Dans ce cas, d'après 3.2, le nombre d'applications-images est strictement inférieur à k_0.

Comme il existe, par ailleurs, des ultrafiltres 2-rangés vérifiant $\# \overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 2k + 1$ pour tout entier k (1.11), nous voyons que le nombre maximum d'applications-images non isomorphes d'un ultrafiltre k-faiblement Ramsey n'est pas imposé par k.

3.6 RÉSUMÉ. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et si k est un entier, les trois propositions

(i) $\mathfrak{D}$ possède k applications-images non isomorphes deux à deux et k seulement,

(ii) $\mathfrak{D}$ est 2-rangé (ou $\mathfrak{D}$ est 2-affable),

(iii) $\overset{-1}{\tau}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 2k + 1$ ($\mathfrak{D}$ est k faiblement Ramsey),

sont indépendants pour $k \geqslant 3$ [indépendants en ce sens: il existe un ultrafiltre vérifiant (i) mais ni (ii) ni (iii), et un autre vérifiant (ii) et ni (i) ni (iii)–je ne sais pas, par contre, pour quelles valeurs de k il existe des ultrafiltres vérifiant (iii) et non (ii)].

RÉSULTAT. La conjonction de deux quelconques des trois énoncés (i), (ii) et (iii) entraîne le troisième.

3.7 *Existence d'ultrafiltres k-rangés non $k + 1$-rangés.*

THÉORÈME. *Soit k un entier. Quel que soit l'ensemble X fini et ordonné, et quel que soit $M \subset \mathcal{P}_k(X)$, il existe un ensemble fini $X' = \varphi(X)$ et $M' = \psi(M) \subset \mathcal{P}_k(X')$ tels que pour tout partage c de $\mathcal{P}_k(X')$ en 3 parties il existe une injection θ de X dans X' vérifiant pour tout k-uplet x de X, $\theta^k(x) \in M' \leftrightarrow x \in M$ et $\# c \circ \theta^k(M) = 1$. Si de plus M ne contient aucun $\mathcal{P}_k(Z)$ avec $\# Z \geqslant k$, M' peut être choisi possédant également cette propriété.*

Ce théorème est dû à Nesetril et Rödl; c'est un cas particulier du très providentiel théorème de **[12']**.

Nous allons montrer ici comment ce théorème donne l'existence d'un $S \subset \mathbf{N}^k$ tel que pour aucun $R \subset \mathbf{N}^{k-1}$ on n'ait $\mathfrak{F}_R \subset \mathfrak{F}_S$ (ni $\mathfrak{F}_R \subset \mathfrak{F}_S \restriction B$) où B est compatible avec $\mathfrak{F}_S$ et où $\mathfrak{F}_R$ (resp. $\mathfrak{F}_S$) est le filtre engendré par $\{\mathbf{N} - A$: $R \cap A^{k-1}$ (resp. $S \cap A^k$) est combinaison booléenne de relations d'équivalence à un élément de $\mathfrak{I}_{k-1}$ (resp. $\mathfrak{I}_k$) près$\}$.

Soit X un ensemble ordonné fini et soit M une partie de $\mathcal{P}_k(X)$ ne contenant aucun $\mathcal{P}_k(Z)$ pour $\# Z > k$, mais telle que M ne soit pas union de deux sous-ensembles de X^k à projections disjointes et telle que de plus les différentes projections de M sur X soient X en entier.

Posons

$$X_0 = X \quad \text{et} \quad M_0 = M,$$
$$X_{n+1} = (X_n) \quad \text{et} \quad M_{n+1} = (M_n).$$

Nous pouvons sans nous restreindre supposer que φ et ψ sont tels que si une projection sur X de M est X, la projection correspondante sur $\varphi(X)$ de $\psi(M)$ est $\varphi(X)$. De plus, si M n'est pas union de m ensembles à projections disjointes, $\psi(M)$ n'est pas union de $m + 2$ ensembles à projections disjointes (prendre une partition ad hoc).

Soit Y une union disjointe des X_n. Nous allons montrer que $S = \bigcup_n M_n$ convient.

Nous avons $S \notin \mathfrak{I}_k$. Donnons nous $R \subset \bigcup_n X_n^{k-1}$ et définissons pour chaque n c_n: $X_n^k \to 3$ par

$c_n(x) = 1$ si tous les $(k-1)$-uplets extraits de la suite des k projections de x appartiennent à R,

$c_n(x) = 2$ si tous les $(k-1)$-uplets extraits de la suite des k projections de x appartiennent à $X_n^{k-1} - R$,

$c_n(x) = 0$ dans les autres cas.

Appliquons le théorème cité plus haut, et choisissons pour chaque n une injection θ_n: $X_n \to X_{n+1}$ vérifiant $\#(c_n \circ \theta_n^k(M_n)) = 1$. Soient respectivement I_0, I_1, I_2 l'ensemble des n tels que $c_n \circ \theta_n^k(M_n) = 0$, 1 ou 2. Assurément, pour une au moins de ces trois valeurs, on a

$$\bigcup_{n\in I_i} \theta_n^k(M_n) \notin \mathfrak{J}_k.$$

Supposons que l'on ait $i = 0$; nous aurions alors, pour tout $n \in I_0$, $\theta_n^k(M_n)$ contenu dans l'union de $k(k-1)/2$ ensembles à projections disjointes car dans ce cas $x \in \theta_n^k(M_n)$ signifie qu'une projection de x appartient à R et une autre à $Y^{k-1} - R$; l'union de ces $\theta_n^k(M_n)$ appartiendrait alors à $\mathfrak{J}_k$, contradiction!

Supposons que $i = 1$ ou 2; nous avons alors, pour tout $n \in I_i$, $\theta_n^k(M_n)$ contenu dans $c_n^{-1}(i)$; ceci donne par projection

$$\theta_n^{k-1}(X_n) \subset R \quad \text{ou}\, \theta_n^{k-1}(X_n) \subset X_{n+1}^{k-1} - R.$$

Posons $B_i = \bigcup_{n\in I_i}\theta_n(X_n)$. Nous avons $R \cap B_1^{k-1} = B_1^{k-1}$ ou $R \cap B_2^{k-1} = \emptyset$, autrement dit $N - B_i$ appartient à $\mathfrak{F}_R$. Nous avons par ailleurs $M \cap B_i^k \notin \mathfrak{J}_k$ alors que S ne contient aucun $\mathfrak{P}_k(Z)$ avec $\#Z > k$, autrement dit, $N - B_i$ n'appartient pas à $\mathfrak{F}_S$; et la preuve est finie.

La construction à partir du filtre $\mathfrak{F}_S$ d'un ultrafiltre $(k-1)$-rangé mais non k-rangé est dès lors canonique en employant l'hypothèse du continu. Je la laisse au lecteur.

Si l'on demande qu'en plus le nombre d'ultrafiltres images de l'ultrafiltre soit fixé, les constructions deviennent très lourdes. Nous reviendrons sur ce point en développant dans un article à venir la méthode des ultrafiltres génériques (fin de [7′]). Par exemple, soit h une application finijective de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $\#h(\overset{-1}{n})$ ne soit pas uniformément borné; les ultrafiltres génériques associés au filtre $\mathfrak{M}_h$ engendré par $\{\mathbf{N} - A: h\restriction A \text{ est injective}\}$ sont tous rangés et tous ont deux images non isomorphes exactement. Autre exemple, les ultrafiltres génériques associés au filtre $\mathfrak{F}_S$ défini plus haut sont faiblement Ramsey si $k \geqslant 3$.

3.8 Nous allons utiliser maintenant une autre méthode, employant des résultats de A. Blass [3], pour montrer l'existence d'ultrafiltre δ-stable non 2-affable n'ayant que deux images non isomorphes.

3.9 *Existence d'un ultrafiltre δ-stable non faiblement Ramsey, n'ayant que deux images libres non isomorphes entre elles*. Nous résumons ici la part de [3] dont nous avons besoin. Soit $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$. L'ensemble des germes en $\mathfrak{D}$ d'applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ (notons le $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$) est totalement ordonné par la relation $f \leqslant g$ si $\{n | f(n) \leqslant g(n)\} \in \mathfrak{D}$. Une partition (S, L) d'un ensemble totalement ordonné est une *coupure* si aucun élément de L ne précède un élément de S. Pour toute application h, finijective, à valeurs dans

N, définissons pour tout $A \subset \mathbf{N}$, une application $c_{h,A}$ de N dans N par:

$$c_{h,A}(n) = \text{cardinalité de } A \cap \overset{-1}{h}(\{n\}).$$

Soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ deux ultrafiltres sur N vérifiant: $\mathfrak{D} = h(\mathfrak{E})$ (h étant finijective). Les germes en $\mathfrak{D}$ des applications $c_{h,A}$, pour h fixé et A variant dans $\mathfrak{E}$, constituent la partie supérieure d'une coupure (S, L) qui sera appelée coupure en $\mathfrak{D}$ associée à $\mathfrak{E}$ en précisant, s'il est besoin, selon l'application h.

Blass établit les deux résultats suivants:

(I) Si une coupure (S, L) en un ultrafiltre δ-stable $\mathfrak{D}$, est telle que $1 \in S$, que S soit clos par multiplication, et que tout sous ensemble dénombrable de L ait un minorant en L, alors il existe un ultrafiltre δ-stable $\mathfrak{E}$ non isomorphe à $\mathfrak{D}$, admettant $\mathfrak{D}$ pour image selon une application h indécomposable (voir 1.6) et tel que la coupure en $\mathfrak{D}$ associée à $\mathfrak{E}$ selon h soit la coupure (S, L). (Ce résultat est un agglomérat des Théorèmes 1 et 2 de la partie indirecte du Théorème 3 de [3].)

(II) Si (S, L) est la coupure associée en un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ à un ultrafiltre $\mathfrak{E}$ faiblement Ramsey, alors S est close par exponentiation. (Ce résultat est la part directe du Théorème 4 de [3].)

Dès lors, il suffit de prendre pour $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre absolu et une coupure (S, L) telle que $1 \in S$, que S soit close par multiplication mais non pas par exponentiation, et telle que tout sous ensemble dénombrable de L ait un minorant commun en L. Telle serait une coupure (S, L) en $\mathfrak{D}$, où S contiendrait les germes des applications majorées par des polynômes à coefficients entiers et ces germes seulement. Visiblement, S contiendrait l'identité mais pas le germe de l'application $n \to 2^n$ parce que l'application exponentielle croît bien plus vite que les applications polynômes et que $\mathfrak{D}$ est libre!

Le seul point consiste à montrer que tout sous-ensemble dénombrable de L (soit M un tel ensemble) a un minorant en L. Soit (P_n) une numérotation par N de l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, et soit (f_n) une numérotation par N d'une famille de représentants des germes appartenant à M.

Soit $A_k = \{n \in \mathbf{N} | \inf(f_1, \ldots, f_k)(n) > 1 + \sup(P_1, \ldots, P_k)(n)\}$. Assurément pour tout k nous avons $A_k \in \mathfrak{D}$ et $\bigcap_k A_k = \varnothing$. Pour $n \in (A_k - A_{k+1})$ posons $f(n) = \inf(f_1, \ldots, f_k)(n)$.

L'application f ainsi construite sur $A_0 \in \mathfrak{D}$ a un germe en $\mathfrak{D}$ qui minore chacun des germes des f_i, et de plus, pour chaque entier i, et pour tout entier n appartenant à un $B_i \in \mathfrak{D}$, $f(n) > P_i(n)$. Si bien que $f \notin S$. L'application f est le minorant cherché.

L'ultrafiltre $\mathfrak{E}$ auquel nous donne droit le résultat I ci-dessus, est δ-stable, non absolu et admet l'ultrafiltre absolu $\mathfrak{D}$ pour image selon une application indécomposable h. Ceci entraîne d'après 1.6, que $\mathfrak{E}$ n'a que deux sortes d'applications images: les isomorphismes et les composés de h par des isomorphismes. Par ailleurs, d'après le résultat II, $\mathfrak{S}$ n'est pas faiblement Ramsey car S n'est pas clos par exponentiation. L'ultrafiltre $\mathfrak{S}$ nous donne donc, d'après 3.2 et 3.4, l'exemple d'un ultrafiltre δ-stable non 2-rangé.

4. **Propriétés des ultrafiltres rangés.**

4.1 PROPOSITION. *Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur* $\mathbf{N}$ *est k-rangé si et seulement si l'ensemble des ultrafiltres $\mathfrak{U}$ ayant $\mathfrak{D}$ pour image selon k applications f_i ayant deux à deux même système égalisateur en $\mathfrak{D}$ (voir 2.6) admet un élément (déterminé à un isomorphisme près) minimum pour la relation de préordre $<$ définie par*:

$$[(\mathfrak{U}, f_1, \ldots, f_k) < (\mathfrak{V}, g_1, \ldots, g_k)]$$
$$\Leftrightarrow \Big[\textit{il existe une application } h \textit{ et une permutation } \sigma \textit{ des indices telles que } \mathfrak{U} = h(\mathfrak{V}) \textit{ et que pour tout } i < k, f_i \circ h \overset{\mathfrak{V}}{=} g_{\sigma(i)}\Big].$$

Nous verrons en 5.2 la traduction de cette propriété en théorie des modèles.

PREUVE. Supposons que l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur $\mathbf{N}$ soit k-rangé. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur I ayant $\mathfrak{D}$ pour image, selon k morphismes g_i ayant deux à deux même système égalisateur $\mathbf{E}$ en $\mathfrak{D}$. Supposons que les germes en $\mathfrak{U}$ des applications g_i soient ainsi ordonnés

$$g_{i_1} < g_{i_2} < \cdots < g_{i_k}.$$

Soit σ l'application que à $l < k$ fait correspondre l'entier i_l, et soit h l'application de I dans $\mathbf{N}^k$ définie par

$$h(x) = (g_{\sigma(1)}(x), g_{\sigma(2)}(x), \ldots, g_{\sigma(k)}(x)).$$

L'ultrafiltre $h(\mathfrak{U})$ est l'ultrafiltre $\otimes^k_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$ décrit lors de la définition 1.7 d'un ultrafiltre k-rangé, et pour tout i, nous avons $\pi_i \cdot h = g_{\sigma(i)}$. Ainsi $(\otimes^k_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) < (\mathfrak{U}, g_1, g_2, \ldots, g_k)$.

Réciproquement, donnons-nous un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ et un système égalisateur $\mathbf{E}$. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre minimum parmi les ultrafiltres $\mathfrak{U}$ "ayant-$\mathfrak{D}$-pour-image-selon-k-applications-admettant-deux-à-deux-E-comme-système-égalisateur". Ce n'est pas se restreindre que de supposer que cet ultrafiltre $\mathfrak{U}$ contient $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ (le germe en $\mathfrak{U}$ de l'application h définie plus haut est, dans ce cas, un isomorphisme). Soit $\mathfrak{S}$ un ultrafiltre contenant $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Nécessairement

$$(\mathfrak{U}, \pi_1, \ldots, \pi_k) < (\mathfrak{S}, \pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_k}).$$

Mais si une application h de $\mathbf{N}^k$ dans $\mathbf{N}^k$ est différente de l'identité et vérifie, pour tout i, $\pi_i \circ h = \pi_{\sigma(i)}$, c'est que pour au moins un couple (i, j) tel que $i < j$ nous avons $\sigma(j) < \sigma(i)$ et dans ce cas, $h(\mathbf{N}^k_+)$ est disjoint de $\mathbf{N}^k_+$.

Or $\mathbf{N}^k_+ \in \mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$; il y a impossibilité. Aussi, h est l'identité et par suite $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$.

Le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ est un ultrafiltre et l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est k-rangé.

4.2 Remarque. Il est bon de remarquer que le couple (h, σ) est *unique* une fois l'élément minimum choisi dans sa classe d'isomorphisme. Le résultat est facile à établir:

Supposons $\mathfrak{D}$ rangé; donnons-nous un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ ayant $\mathfrak{D}$ pour image selon k applications admettant deux-à-deux même système égalisateur **E**. Prenons comme élément minimum $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Les k égalités de germes $\pi_i \circ h = g_{\sigma(i)}$ peuvent être traitées comme égalités d'applications car k est fini. Nous en déduisons que

$$(\text{pour tout } i,\, g_i(z) = g_i(t)) \leftrightarrow (h(z) = h(t)),$$

si bien que eq-h est déterminé.

S'il existe une autre solution h', alors eq-h = eq-h' et $h = \theta \circ h'$ (où θ est un isomorphisme). Mais $h(\mathfrak{U}) = h'(\mathfrak{U})$. Si bien que $\theta \circ h'(\mathfrak{U}) = h'(\mathfrak{U})$ et d'après le lemme fondamental de Kenyon-Katětov (**[10]**, **[12]**) le germe de θ en $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ est l'identité.

Maintenant, supposons $\sigma \neq \sigma'$. Les applications inverses θ et θ' sont également différentes et pour un i tel que $\theta(i) \neq \theta'(i)$, nous avons

$$\pi_{\theta(i)} \circ h = g_i = \pi_{\theta'(i)} \circ h.$$

Ainsi il faudrait que

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) | x_{\theta(i)} = x_{\theta'(i)}\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{E},k},$$

mais ceci contredit

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) | x_{\theta(i)} < x_{\theta'(i)}\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}.$$

La définition d'ultrafiltre rangé donnée en 2.6 fait intervenir l'ordre de **N**. La proposition ci-dessous n'est qu'une transcription de 2.6 ne faisant pas appel à cet ordre.

4.3 Proposition. *Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur* **N** *est rangé si et seulement si pour tout système égalisateur* **E** *ne contenant pas d'isomorphisme, le filtre sur* $\mathbf{N}^k$ *engendré par* ^{k}eq-h *pour* $h \in \mathbf{E}$ *et les* ^{k}dif-g *pour* $g(\mathfrak{D})$ *libre et* $g \notin \mathbf{E}$, *est contenu dans* $k!$ *ultrafiltres exactement.*

Ainsi, tout ultrafiltre isomorphe à un ultrafiltre rangé est lui-même rangé.

4.4 Définition. Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur **N** possède la *propriété* C si tout couple d'applications (f, g) défini sur **N** et vérifiant $f(\mathfrak{D}) = g(\mathfrak{D})$ vérifie aussi $f =^{\mathfrak{D}} g$.

Exemple. Tout ultrafiltre absolu possède la propriété C.

Contre-exemple. Aucun produit $\otimes^k \mathfrak{D}$ avec $k > 2$ ne possède la propriété C.

4.5 Nous allons montrer que tout ultrafiltre 2-rangé possède la propriété C, en montrant que tout ultrafiltre 3-fléché possède cette propriété.

Définition (voir **[0]**). Un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ sur **N** est dit *k-fléché* si toute partie

R de $\mathbf{N}^2$ compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ contient un ensemble S^2_+ avec $\# S = k$. Il est dit *fléché* s'il est k-fléché pour tout entier k.

4.6 PROPOSITION. *Tout ultrafiltre* 3-*fléché possède la propriété* C.

PREUVE. Supposons que l'ultrafiltre $\mathfrak{G}$ soit 3-fléché et que deux applications f' et g' vérifiant $f'(\mathfrak{G}) = g'(\mathfrak{G})$ et $f' \neq^{\mathfrak{G}} g'$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe alors un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ 3-fléché, un ensemble $D \in \mathfrak{D}$ et deux applications f et g vérifiant $f(\mathfrak{D}) = g(\mathfrak{D})$, $f \neq^{\mathfrak{D}} g$, et $f(m) \neq f(n)$ ou $g(m) \neq g(n)$ si $m \neq n$ et $(m, n) \in D \times D$.

Soit h l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définie par $h(n) = 2^{f'(n)} \times 3^{g'(n)}$ et soient respectivement f et g les applications qui font respectivement correspondre à un nombre entier la plus grande puissance de deux et de trois le divisant. Posons $\mathfrak{D} = h(\mathfrak{G})$ et appelons D l'ensemble des entiers dont les seuls diviseurs premiers sont deux et trois. Nous avons $f' = f \circ h$, $g' = g \circ h$, $f(\mathfrak{D}) = g(\mathfrak{D})$, $f \neq^{\mathfrak{D}} g$, $D \in \mathfrak{D}$ et $f(m) \neq f(n)$ ou $g(m) \neq g(n)$ pour tout couple d'entiers distincts appartenant à D. Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathfrak{D}$ est 3-fléché, comme toute image d'un ultrafiltre 3-fléché: donnons nous $R \subset \mathbf{N}^2 - \{(x,y)\colon x = y\}$ compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$; nous avons $S = (h \times h)^{-1}(R) \subset \mathbf{N}^2 - \{(x,y)\colon h(x) \neq h(y)\}$ compatible avec $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, si bien qu'il existe X vérifiant $X^2_+ \subset S$ et $\# X = 3$, et finalement nous obtenons $(h(X))^2_+ \subset R$ et $\# h(X) = 3$ car la restriction de h à X est injective; l'ultrafiltre $\mathfrak{D}$ est 3-fléché.

Songeons maintenant à montrer qu'un tel ultrafiltre $\mathfrak{D}$ ne peut exister.

Nous avons pour tout $D \subset \mathfrak{D}$, $f(D) \cap g(D) \neq \varnothing$, si bien que l'une au moins des deux relations R et R' respectivement définies par

$$R = \{(x,y)\colon x < y \text{ et } f(x) = g(y)\},$$
$$R' = \{(x,y)\colon x < y \text{ et } f(y) = g(x)\},$$

est compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Supposons que R le soit. Dans ce cas l'un au moins des trois sous-ensembles S, S' et S'' respectivement définis par

$$S = R \cap \{(x,y)\colon x < y \text{ et } f(x) < f(y)\},$$
$$S' = R \cap \{(x,y)\colon x < y \text{ et } f(x) = f(y)\},$$
$$S'' = R \cap \{(x,y)\colon x < y \text{ et } f(y) < f(x)\},$$

est compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \upharpoonright R$.

Donnons nous trois nombres entiers vérifiant $x < y < z$, et tels que $\{x, y, z\}^2_+ \subset R$. Nous avons $f(x) = g(y) = g(z)$ et $f(y) = g(z)$, ce qui entraîne $f(x) = f(y)$. Par suite, seul S' peut être compatible avec $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \upharpoonright R$. Mais dans ce cas, f serait de germe constant en $\mathfrak{D}$, ce qui est exclu.

4.7 COROLLAIRE. *Tout ultrafiltre* 2-*rangé possède la propriété* C.

En effet, tout ultrafiltre 2-rangé est fléché. Ceci implique que la distinction signalée en 1.1 entre le nombre d'ultrafiltres-images d'un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ et le nombre d'applications-images de $\mathfrak{D}$ tombe lorsque $\mathfrak{D}$ est 2-rangé.

4.8 PROPOSITION. *Tout ultrafiltre image d'un ultrafiltre k-rangé est k-rangé.*

PREUVE. Soit $\mathfrak{S}$ un ultrafiltre k-rangé sur **N** et soit h une application de **N** dans **N**. Ce n'est pas se restreindre que de supposer que cette application h est non décroissante car d'une part, $\mathfrak{S}$ étant δ-stable, h est isomorphe à une application non décroissante et d'autre part, d'après 4.3, un ultrafiltre isomorphe à un ultrafiltre k-rangé est k-rangé. Nous supposons donc que h est non décroissante.

Donnons nous un système égalisateur **E** en $\mathfrak{D} = h(\mathfrak{S})$. Nous voulons montrer que le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ est un ultrafiltre.

Soit **F** un système égalisateur en $\mathfrak{S}$ contenant $f \circ h$ si et seulement si $f \in \mathbf{E}$. Comme $\mathfrak{S}$ est k-rangé, $\mathfrak{F}_{\mathbf{F},k}$ est l'ultrafiltre $\otimes^k_{\mathbf{F}}\mathfrak{S}$.

Notons ${}^k h$ l'application de $\mathbf{N}^k$ dans $\mathbf{N}^k$ définie par ${}^k h(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_k))$. D'après le choix de **F**, ${}^k h(\otimes^k_{\mathbf{F}}\mathfrak{S}) \supset \mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$. Supposons que $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ n'est pas un ultrafiltre, c'est-à-dire n'est pas l'ultrafiltre image de $\otimes^k_{\mathbf{F}}\mathfrak{S}$ selon ${}^k h$. Alors il existe $R \subset \mathbf{N}^k_+$ tel que R est compatible avec $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ alors que $S = {}^k h^{-1}(R)$ n'appartient pas à $\otimes^k_{\mathbf{F}}\mathfrak{S}$.

Ecrivons en termes de ^{k}eq-f que $S \notin \otimes^k_{\mathbf{F}}\mathfrak{S}$: pour un $E \in \mathfrak{S}$,

$$\underbrace{S \cap E^k \cap {}^k\text{eq-}f \circ h}_{T} \cap \bigcap_{i \in K} {}^k\text{dif-}g_i = \varnothing,$$

où $f \circ h \in \mathbf{F}$ et chacun des $g_i \notin \mathbf{F}$ et où K est fini.

L'ensemble T est saturé pour la relation d'équivalence "$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_k)$" si et seulement si "pour tout i, $h(x_i) = h(y_i)$".

Par suite, le saturé de $\bigcap_{i \in K} {}^k\text{dif-}g_i$ pour cette relation d'équivalence est disjoint de T. De plus si $\bigcap_{i \in K} {}^k\text{dif-}g_i$ rencontrait ^{k}eq-h, son saturé contiendrait ^{k}eq-h et recontrerait T. Par suite, $\bigcap_{i \in K} {}^k\text{dif-}g_i$ ne rencontre pas ^{k}eq-h, ce qui s'énonce aussi $\bigcup_{i \in K}(\mathbf{N}^k \dot{-} {}^k\text{dif-}g_i) \supset {}^k\text{eq-}h$, ce qui entraîne en se restreignant aux k-uplets dont les $k - 1$ premiers termes sont égaux

$${}^2\text{eq-}h \subset \bigcup_{i \in K} {}^2\text{eq-}g_i.$$

Prenons un élément n_k dans chacun des ensembles $\overset{-1}{h}(k)$, et définissons une application φ: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ par: $\varphi(m)$ est le plus petit $i \in \mathbf{N}$ tel que $g_i(m) = g_i(n_{h(m)})$. L'ensemble K étant fini, la restriction de φ à un ensemble $E \in \mathfrak{S}$ est constante et nous avons ainsi, pour un $i_0 \in K$,

$$\text{eq-}h \overset{\mathfrak{S}}{\subset} \text{eq-}g_{i_0},$$

ce que nous pouvons aussi écrire $g_{i_0} =^{\mathfrak{S}} f_{i_0} \circ h$. Notons que $f_{i_0} \notin \mathbf{E}$ par définition du système égalisateur **F**.

Nous avons maintenant

$$\underbrace{T \cap {}^k\text{dif-}g_{i_0}}_{T_1} \cap \bigcap_{i \neq i_0} {}^k\text{dif-}g_i \overset{\mathfrak{S}}{=} \varnothing$$

où T_1 est saturé par la relation d'équivalence $\equiv$. Nous recommençons jusqu'à épuisement de l'ensemble K fini, privé d'un élément à chaque coup.

Finalement, nous avons une intersection finie d'ensembles, saturés pour la relation d'équivalence $\equiv$, et cette intersection est vide. La formule $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est applicable dans le cas où A ou B sont saturés par la relation d'équivalence associée à f.

Prenons l'image par ${}^k h$ de cette intersection, nous obtenons:

$$R \cap {}^k\text{eq-}f \cap \bigcap_i {}^k\text{dif-}f_i \overset{\mathfrak{D}}{=} \varnothing$$

où $f \in \mathbf{E}$ mais où aucun f_i n'appartient à **E**. Le fait que cette intersection soit vide signifie que R n'est pas compatible avec le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$, ce qui est contraire aux hypothèses. Il est donc absurde de supposer que le filtre $\mathfrak{F}_{\mathbf{E},k}$ n'est pas un ultrafiltre.

Nous obtenons ainsi en corollaire immédiat de la Proposition 4.8 le théorème:

4.9 THÉORÈME. *La classe des ultrafiltres rangés est close par opération image.*

5. Ultrafiltres rangés et théorie des modèles.

5.1 Soit T_0 la théorie du modèle standard de l'arithmétique écrite dans L_0, le langage plein de **N**, c'est-à-dire le langage associant un symbole d'application n-aire à toute application $\mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$. Les modèles de T_0 sont les limites inductives des ultrapuissances de **N** selon des ultrafiltres sur **N** **[11]**.

Les modèles de T_0 engendrés par un seul élément sont isomorphes à des ultrapuissances que nous noterons $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$, et $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ sera sous-modèle élémentaire de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{S}$ si et seulement si $\mathfrak{D}$ est image de $\mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{D}$ est absolu, $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ est une extension minimale de **N**, car si le germe en $\mathfrak{D}$ de f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est injectif, il existe f': $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tel que le germe en $\mathfrak{D}$ de $f' \circ f$ soit l'identité. Si $\mathfrak{D}$ est δ-stable, tout sous-modèle élémentaire de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ différent de **N** est cofinal à $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ **[2]**.

Comment se distinguent les modèles isomorphes à $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ si $\mathfrak{D}$ est un ultrafiltre rangé?

5.2 Il est facile de voir qu'il n'existe pas de sommes répétées dans une catégorie composée de modèles totalement ordonnés, à moins que cette catégorie ne soit telle que $\#\text{hom}(x, y) \leqslant 1$ pour tout couple (x, y).

En effet, donnons nous trois modèles de T_0: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$. Supposons que $\mathfrak{B}$

soit la somme répétèe deux fois de $\mathcal{A}$, les injections étant i_1 et i_2, et que $\mathcal{A}$ s'injecte selon les morphismes j et k dans $\mathfrak{M}$. Il doit exister une injection élémentaire h de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{M}$ telle que

(i) $h \circ i_1 = j$ et $h_0 i_2 = k$.

Considérons maintenant le couple $(k, j)^2$; une injection élémentaire g de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{M}$ doit vérifier

(ii) $g \circ i_1 = k$ et $g_0 i_2 = j$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[rr, "h"] \arrow[rr, bend left=60, "g"] & & \mathfrak{M} \\ \mathcal{A} \arrow[u, bend left, "i_1"] \arrow[u, bend right, "i_2"'] \arrow[urr, "k"] \arrow[urr, bend right, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

Les deux injections j et k étant différentes et $\mathfrak{M}$ étant totalement ordonné il existe $a \in \mathfrak{B}$ tel que $j(a) \neq k(a)$. Supposons $j(a) < k(a)$. Les applications h et g étant croissantes, nous avons d'après (i), $i_1(a) < i_2(a)$ et d'après (ii) $i_1(a) > i_2(a)$. Contradiction.

Sauf cas très particulier, il n'existe pas de sommes répétées dans une catégorie composée d'ensembles totalement ordonnés, les morphismes respectant l'ordre, mais il existe un substitut de cette notion qui ne définit pas un objet unique à un isomorphisme près, mais plusieurs objets très semblables:

Definition. Soient $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ deux modèles de T_0, et k un entier. $\mathfrak{B}$ sera dite *o-somme répétée k fois* de $\mathcal{A}$ (les injections étant $i_1, \ldots, i_k$), si pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T_0 et tout k-uplet $(f_1, \ldots, f_k)$ de morphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{M}$, il existe un morphisme h unique de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{M}$ et une permutation σ des indices tels que pour tout $j < k$, $f_j = h \circ f_{i_{\sigma(j)}}$.

Définition (suite). Soit $\mathcal{C}$ un sous-modèle de $\mathcal{A}$. Alors $\mathfrak{B}$ sera dite o-somme répétée k fois de $\mathcal{A}$ avec amalgamation le long de $\mathcal{C}$ (les injections étant $i_1, \ldots, i_k$) si d'une part les restrictions de ces injections à $\mathcal{C}$ coïncident et si d'autre part, le problème "quasi-universel" énoncé plus haut a une solution et une seule pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T_0 et pour tout k-uplet $(f_1, \ldots, f_k)$ de morphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{M}$ dont les restrictions à $\mathcal{C}$ coïncident.

5.3 Théorème. *Un modèle $\mathfrak{M}$ de T_0 engendré par un élément, est isomorphe à $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ où $\mathfrak{D}$ est un ultrafiltre k-rangé, si et seulement si pour tout sous-modèle élémentaire $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$, il existe des o-sommes de $\mathfrak{M}$ répétées k fois avec amalgamations le long de $\mathfrak{M}'$.*

PREUVE. Le système égalisateur **E** de deux morphismes f et g de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{D}$, détermine le sous-modèle $\mathfrak{M}'$ de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ sur lequel les deux injections élémentaires de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ dans $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/\mathfrak{E}$ (associées à f et g respectivement) coïncident. Ce rapprochement une fois fait, le Théorème (5.3) n'est que la traduction de (4.1) et (4.2).

5.4 REMARQUE. Si $\mathfrak{D}$ est un ultrafiltre k-rangé, tout sous-modèle élémentaire de $\mathfrak{M} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}_{\mathfrak{D}}$ s'injecte de façon unique en $\mathfrak{M}$. Cet énoncé traduit 4.7 en utilisant le résultat de Keisler précédemment cité **[11]**.

5.5 Soit T une théorie écrite dans un langage L et soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T. Supposons que L contienne une relation d'ordre $<$. Un sous-ensemble I de $\mathfrak{M}$ est un ensemble d'*o-indiscernables par* une relation R de poids k, écrite dans le langage L, si tous les k-uplets de I, croissants pour l'ordre $<$ vérifient (ou ne vérifient pas) simultanément la dite relation (voir **[15]** par exemple).

Un ensemble d'*o-indiscernables* est un ensemble composé d'éléments o-indiscernables par toutes les relations R écrites dans le langage L.

Soit $m \in \mathfrak{M}$. Le *type* de m est l'ensemble des relations de poids 1 vérifiées par m. Si par exemple, $T = T_0$ (voir 5.1) et $L = L_0$, le type d'un entier non standard est un ultrafiltre sur **N**.

Soit $I \subset \mathfrak{M}$. Il est naturel d'appeler *k-type de I* l'ensemble des propriétés vérifiées par les différents k-uplets d'éléments de I. On n'a pas à préciser de quels éléments on parle dans le cas où I est composé d'o-indiscernables, le k-type de I étant alors donné par l'ensemble des relations de poids k vérifiées par les k-uplets croissants de I et le ω-type de I est la donnée de tous les k-types de I lorsque k varie dans **N**.

5.6 DÉFINITION. Soit k un entier. Un ensemble infini d'indiscernables, I, (d'o-indiscernables) sera dit *k-stationnaire* si son ω-type est complètement déterminé par la connaissance du k-type de I et le fait que I est un ensemble d'indiscernables (d'o-indiscernables).

EXEMPLES. Si T est la théorie des corps algébriquement clos, tout ensemble d'indiscernables est 0-stationnaire.

Si $L = L_0$ et $T = T_0$ (voir 5.1), tout ensemble d'o-indiscernables ayant pour 1-type un ultrafiltre absolu est 1-stationnaire (preuve en (0.5)).

Dans le cas $L = L_0$ et $T = T_0$ (voir 5.1), nous obtenons

5.7 THÉORÈME. *Tout ensemble d'o-indiscernables ayant pour* 1-*type un ultrafiltre δ-stable $\mathfrak{D}$ et pour* 2-*type* $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ *est* 2-*stationnaire.*

PREUVE. Traduire 1.4.

5.8 THÉORÈME. *Tout ensemble I d'o-indiscernables ayant pour* 1-*type un ultrafiltre $\mathfrak{D}$ rangé est* 2-*stationnaire.*

PREUVE. Le 2-type de I est un ultrafiltre égal à $\mathfrak{D} \otimes_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$. Le système égalisateur **E** est déterminé par ce 2-type, et le k-type de I est $\otimes^k_{\mathbf{E}} \mathfrak{D}$.

5.9 THÉORÈME. *Tout ensemble d'o-indiscernables ayant pour* 1*-type un ultrafiltre* $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}'$ *où* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{U}'$ *sont absolus est* 2*-stationnaire.*

PREUVE. Traduire 2.10.

BIBLIOGRAPHY

0. J. Baumgartner and A. Taylor, *Partition theorems and ultrafilters*, Trans. Amer. Math. Soc. **241** (1978), 283–309.

1. A. Blass, *Ordering of ultrafilters*, Thesis, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1970.

2. ______, *The intersection of nonstandard models of arithmetic*, J. Symbolic Logic **37** (1972), 103–106.

3. ______, *Ultrafilter mappings and their Dedekind cuts*, Trans. Amer. Math. Soc. **188** (1974), 327–340.

3′. ______, *Some initial segments of the Rudin-Keisler ordering* (to appear).

4. D. Booth, *Ultrafilters on a countable set*, Ann. Math. Logic **2** (1970/1971), no. 1, 1–24.

5. G. Choquet, *Construction d'ultrafiltres sur* N, Bull. Sci. Math. (2) **92** (1968), 41–48.

6. ______, *Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur* N, Bull. Sci. Math. (2) **92** (1968), 143–153.

7. Maryvonne Daguenet, *Rapport entre l'ensemble des ultrafiltres admettant un ultrafiltre donné pour image et l'ensemble des images de cet ultrafiltre*, Comment Math. Univ. Carolinae **16** (1975), 99–113.

7′. ______, *Étude combinatoire et topologique des filtres sur* N, Thèse, Paris, 1976.

8. P. Erdös and G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. **2** (1935), 463–470.

9. L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

10. M. Katětov, *A theorem on mappings*, Comment Math. Univ. Carolinae **8** (1967), 431–433.

11. H. J. Keisler, *Limit ultrapowers*, Trans. Amer. Math. Soc. **107** (1963), 382–408.

12. H. Kenyon, *Problem* 5077, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 216.

12′. J. Nešetřil and V. Rödl, *A structural generalisation of the Ramsey theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 127–128.

13. F. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (1930), 264–286.

14. M. E. Rudin, *Partial orders on the types in* βN, Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 1–24.

15. G. E. Sacks, *Saturated model theory*, Benjamin, New York, 1972.

16. R. C. Solomon, *Ultrafilters and ultraproducts*, Dissertation, Bedford College, London, 1972.

17. A. A. Zykov, *On some properties of linear complexes*, Mat. Sb., N. S. **24** (**66**) (1949), 163–188; *Algebraic topology*, Transl. Amer. Math. Soc. (1) **7** (1962), 418–449.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE PARIS VII, 2 PLACE JUSSIEU, 75005 PARIS, FRANCE