TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 286, Number 1, November 1984

SOUS-ESPACES BIEN DISPOSES DE L^1-APPLICATIONS

BY

GILLES GODEFROY

RÉSUMÉ. On montre que le quotient d'un espace L^1 par un sous-espace fermé dont la boule unité est fermée dans L^0 est faiblement séquentiellement complet; cette situation se présente dans de nombreux cas concrets, tels que le quotient L^1/H^1. On applique le résultat général dans diverses situations: duaux de certaines algèbres uniformes, analyse harmonique, fonctions de plusieurs variables complexes. On montre ensuite comment peuvent s'appliquer les métheodes de M-structure; on considère aussi de nouvelles classes d'uniques préduaux. A titre d'exemples, on montre:

(1) Le caractère f.s.c. d'espaces $\mathscr{C}_E(G)^*$, pour de "gros" sous-ensembles E du groupe dual $\Gamma = \hat{G}$.

(2) Le caractère f.s.c. d'espaces L^1/H^1 mutli-dimensionnels, tels que $L^1/H^1(D^n)$ et $L^1/H^1(B^n)$.

(3) L'unicité du prédual pour certaines sous-algèbres ultrafaiblement fermées non-autoadjointes de $\mathscr{L}(H)$.

ABSTRACT. One shows that the quotient of an L^1-space by a closed subspace, whose unit ball is closed in L^0, is weakly sequentially complete. This situation occurs in many natural cases, like L^1/H^1. This result is applied in several situations: uniform algebras, harmonic analysis, functions of several complex variables. One shows how to apply M-structure theory; several new classes of unique preduals are also obtained. As an example, one shows:

(1) If E is a "big" subset of the dual group $\Gamma = \hat{G}$, then $\mathscr{C}_E(G)^*$ is w.s.c.

(2) The spaces $L^1/H^1(D^n)$ and $L^1/H^1(B^n)$ are w.s.c.

(3) Several classes of ω^*-closed non-self-adjoint subalgebras of $\mathscr{L}(H)$ have unique preduals.

REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier, pour de fructueuses conversations, S. V. Kisliakov, rencontré lors de son séjour à PARIS VI en Novembre 1982, ainsi que B. Maurey.

NOTATIONS. Si X est un espace de Banach, on note X_1 sa boule unité fermée, ω la topologie faible définie sur X, ω^* la topologie pré-faible définie sur son dual X^*. Les espaces considérés sont réels ou complexes; les espaces L^1 qu'on étudie seront separables en général, sans que cette restriction soit essentielle pour la validité des démonstrations. Une L-projection d'un espace Y sur un sous-espace X est une projection π qui vérifie $\|x\| = \|\pi x\| + \|x - \pi x\|$ $\forall x \in Y$; l'espace X est alors dit L-facteur de Y. Si G est un groupe compact abelien, et E un sous-ensemble du

Received by the editors June 20, 1983 and, in revised form, December 9, 1983.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46B20, 32A35, 43A46, 46J10.

Key words and phrases. Measure convergence, small subsets of discrete groups, Dirichlet algebras, Hardy spaces, unicity of preduals.

0002-9947/84 $1.00 + $.25 per page

groupe dual, on note

$$\mathscr{C}_E(G) = \{f \in \mathscr{C}(G) | \hat{f}(\gamma) = 0 \ \forall \gamma \in \hat{G} \setminus E\}.$$

On définit de façon analogue $L^1_E(G)$ et $\mathscr{M}_E(G)$. La sphère unité d'un Banach X est notée $S_1(X)$. Les autres notations employées sont classique ou seront précisées au cours de l'article.

I. Sous-espaces bien disposes de L^1. H-espaces. On note L^1 l'espace $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ des classes de fonctions intégrables par rapport à une mesure μ bornée, la tribu Σ étant dénombrablement engendrée. On note $L^{1**} = L^1 \oplus_1 L^1_s$, ou L^1_s désigne la bande étrangère à L^1 dans L^{1**}.

LEMME 1. *Soit X un sous-espace fermé de L^1. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *La boule unité X_1 de X est fermée dans $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

(2) *Il existe p, $0 \leqslant p < 1$, tel que X_1 soit fermée dans $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

(3) *On a $X^{**} = X \oplus (X^{**} \cap L^1_s)$.*

DEMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2) est évident.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de X_1 qui est de Cauchy dans L^0. Soit p_0 tel que X_1 soit fermée dans L^{p_0}. Comme L^0 et L^{p_0} sont complets, il suffit de montrer que (h_n) est de Cauchy dans L^{p_0}. Or, on a

$$\begin{aligned}\forall \alpha > 0, \quad \int_\Omega |h_n - h_k|^{p_0} d\mu &\leqslant \alpha^{p_0} + \int_{|h_n - h_k| > \alpha} |h_n - h_k|^{p_0} d\mu \\ &\leqslant \alpha^{p_0} + \left(|\mu|\{|h_n - h_k| > \alpha\}\right)^{1-p_0} \left(\int |h_n - h_k| d\mu\right)^{p_0} \\ &\leqslant \alpha^{p_0} + 2^{p_0}\left(|\mu|\{|h_n - h_k| > \alpha\}\right)^{1-p_0}\end{aligned}$$

ce qui montre clairement que (h_n) est de Cauchy dans L^{p_0}.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). D'après [7], on a l'équivalence suivante. C fermé dans $L^0 \Leftrightarrow \pi(\tilde{C}) = C$ où C désigne un convexe fermé borné de L^1, π la projection canonique de L^{1**} sur L^1, et $\tilde{C}$ l'adhérence de C dans (L^{1**}, ω^*).

Rappelons la démonstration de [7]: Soit C convexe borné de L^1, fermé dans L^0. Soit $w \in C$, $w = \lim_U (e_n)$ dans (L^{1**}, ω^*), avec $(e_n) \subseteq C$. On pose $e = \pi(w)$, et $z = w - e$. On considère le sous-espace F suivant de $L^\infty(\mu)$:

$$F = \{g \in L^\infty(\mu) | |z|(|g|) = 0\}.$$

Pour tout $g \in F$, on a

$$\lim_{\mathscr{U}} \int_\Omega g e_n . d\mu = w(g) = (w - z)(g) = \int_\Omega g.e \, d\mu. \tag{1}$$

D'autre part, on montre aisément que

$$z \in L^1_s \Rightarrow \exists f_0 \in F \text{ telle que } f_0 > 0 \ \mu\text{-presque partout.}$$

On pose alors $d\nu = f_0 \cdot d\mu$. Il est clair que $L^1(\mu)$ s'identifie à un sous-espace dense de $L^1(\nu)$; tout élément de $L^1(\nu)^*$ se représente donc par une fonction $g \in L^\infty(\mu)$ qui appartient en fait à F. En effet, la fonction f_0 joue le rôle de l'unité de $L^\infty(\nu)$, et on a

$$g \in L^1(\nu)^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}^+ \text{ tel que } |g| \leqslant \lambda |f_0| \ \mu \text{ p.p.}$$

et l'espace F est clairement un idéal d'ordre de $L^\infty(\mu)$.

D'après la formule (1), on a

$$\lim_{\mathscr{U}} e_n = e \quad \text{dans } \left(L^1(\nu), \omega\right).$$

Par compatibilité des topologies faibles et fortes, il existe alors une suite

$$e'_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{i,n} e_{i,n} \qquad \left(\lambda_{i,n} \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{i,n} = 1\right)$$

de combinaisons linéaires des (e_n) telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|e'_n - e\|_{L^1(\nu)} = 0.$$

Il existe alors une sous-suite $(e''_n)_{n \geqslant 1}$ de (e'_n) telle que $e''_n(x) \to e(x)$ pour ν-presque tout x, c'est-à-dire pour μ-presque tout x; en particulier, (e''_n) tend vers (e) dans $L^0(\mu)$. Comme C est $L^0(\mu)$-fermé, on a $e \in C$ et $\pi(\tilde{C}) = C$.

Inversement, supposons que $\pi(\tilde{C}) = C$. On a montré ci-dessus que si $\lim_{\mathscr{U}} e_n = w$ dans (L^{1**}, ω^*), il existe une suite (e''_n) de combinaisons linéaires des (e_n) telle que $e''_n \to \pi(w)$ μ-presque partout. Soit alors $f \in L^1(\mu)$ telle que $f = \lim_{n \to \infty} e_n$ dans $L^0(\mu)$, avec $(e_n)_{n \geqslant 1}$ dans C. Il existe une sous-suite (e'_n) telle que $e'_n(x) \to f(x)$ pour μ-presque tout x. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non trivial, et $w = \lim_{\mathscr{U}} e'_n$ dans (L^{1**}, ω^*); l'élément $e = \pi(w)$ de L^1 est limite μ-presque partout d'une suite de combinaisons linéaires des (e'_n), d'où $e = f = \pi(w)$ et $f \in C$. On en déduit immédiatement

(1) $\Leftrightarrow$ (3), en considérant $C = X_1$. C.Q.F.D.

Posons alors

DEFINITION 2. Un sous-espace fermé X de L^1 sera dit *bien disposé* s'il vérifie les propriétés équivalentes du Lemme 1 ci-dessus.

Le résultat suivant explique l'intérêt de cette notion.

THEOREME 3. *Soit X un sous-espace bien disposé d'un espace L^1. Alors le quotient L^1/X est faiblement séquentiellement complet.*

DEMONSTRATION. On a par hypothèse $X^{**} = X^{\perp\perp} = X \oplus (X^{\perp\perp} \cap L^1_s)$. On vérifie immédiatement qu'on a

$$\left(L^1/X\right)^{**} = L^{1**}/X^{\perp\perp} = L^1/X \oplus L^1_s/L^1_s \cap X^{\perp\perp}.$$

Nous vérifions que la projection associée de $(L^1/X)^{**}$ sur L^1/X est une L-projection. Soit $x_1 \in L^1$, $x_2 \in L^1_s$, $x = x_1 + x_2$.

On a

$$\begin{aligned}\|\dot{x}\| &= \inf\left\{\|x + t\| \,\middle|\, t \in X^{\perp\perp}\right\}\\ &= \inf\left\{\|x_1 + x_2 + t + u\| \,\middle|\, t \in X, u \in X^{\perp\perp} \cap L_s^1\right\}\\ &= \inf\left\{\|x_1 + t\| + \|x_2 + u\| \,\middle|\, t \in X, u \in X^{\perp\perp} \cap L_s^1\right\}\\ &= \inf\left\{\|x_1 + t\| \,\middle|\, t \in X\right\} + \inf\left\{\|x_2 + u\| \,\middle|\, u \in X^{\perp\perp} \cap L_s^1\right\}\\ &= \|\dot{x}_1\| + \|\dot{x}_2\|.\end{aligned}$$

Le Théorème 3 sera alors une conséquence du

LEMME 4 **[14]**. *Soit Y un espace de Banach tel qu'il existe une L-projection de Y^{**} sur Y. Alors Y est faiblement sequentiellement complet.*

DEMONSTRATION. Soit Y_s le noyau de la L-projection de Y^{**} sur Y. Soit $y \in Y_s$ de lère classe de Baire sur (Y^*, ω^*). Il faut montrer que $y = 0$. Pour cela, considérons $u \in Y$ tel que $\|u\| = \|y\|$. Soit $\varepsilon_1 = \pm 1$. On a pour tout $w \in Y$

$$\|w\| \leqslant \|w - \varepsilon_1 u\| + \|u\| \leqslant \|w - \varepsilon_1 u\| + \|y\| = \|w - (y + \varepsilon_1 u)\|.$$

Si E est un sous-espace fermé d'un Banach F, on a $E^* = F^*/E^\perp$ isométriquement.

En appliquant cela *à* $\operatorname{Ker}(y + \varepsilon_1 u) \subseteq Y^*$, on obtient

$$\forall w \in Y, \quad \left\|w|_{\operatorname{Ker}(y+\varepsilon_1 u)}\right\| = d(w, \mathbf{K}(y + \varepsilon_1 u))$$

où $\mathbf{K}(y + \varepsilon_1 u)$ est la droite qui porte $(y + \varepsilon_1 u)$. On a donc ici

$$\forall w \in Y, \quad \left\|w|_{\operatorname{Ker}(y+\varepsilon_1 u)}\right\| = \|w\|.$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(y + \varepsilon_1 u) \cap Y_1^*$ est ω^*-dense dans Y_1^*; comme y est de lére classe, $\operatorname{Ker}(y + \varepsilon_1 u) \cap Y_1^*$ est un $\mathfrak{g}_\delta$-dense de (Y_1^*, ω^*). En effet si $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ dans (Y^{**}, ω^*) où $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dans X, on peut écrire

$$\operatorname{Ker} y = \bigcap_{n,k\geqslant 1} \left\{x \in X^* \,|\, \exists p \geqslant n \text{ t.q. } |f_p(x)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

L'espace (Y_1^*, ω^*) étant compact, l'ensemble $\operatorname{Ker}(y + u) \cap \operatorname{Ker}(y - u) \cap Y_1^*$ est dense dans (Y_1^*, ω^*) par le théorème de Baire; mais cet ensemble est contenu dans $\operatorname{Ker} u \cap Y_1^*$, et donc $u = 0$ puisque u est ω^*-continue; par conséquent $y = 0$. C.Q.F.D.

EXEMPLES. Si R est un sous-espace reflexif de L^1, alors R est bien disposé (trivial). Il en est de même pour $X = L^1(\Omega, \Sigma', \mu)$, où Σ' est une sous-tribu de Σ.

Soit X un sous-espace fermé de L^1 qui s'écrit $X = L^1 \cap Y$, où Y est un sous-espace fermé de L^p, pour un certain $0 < p < 1$. D'après le Théorème 3, l'espace L^1/X est f.s.c. A titre d'exemple, on a $H^1(\mathbf{T}) = L^1(\mathbf{T}) \cap H^{1/2}(\mathbf{T})$, et $H^{1/2}(\mathbf{T})$ est un e.v.t. complet, donc fermé dans $L^{1/2}(\mathbf{T})$; on retrouve $L^1(\mathbf{T})/H^1(\mathbf{T})$ f.s.c. **[24]**. Notons qu'on a ici une démonstration du caractère f.s.c. de L^1/H^1 qui *n*'utilise *pas* une technique d'emsembles pics.

Notons que si μ est une mesure diffuse, un hyperplan fermé de l'espace $L^1(\mu)$ n'est jamais bien disposé. Le Theorème 3 permet de construire de nombreux autres exemples.

Nous allons maintenant nous interesser à une classe d'espaces bien disposés qui apparaissent naturellement comme des espaces duaux. La question suivante est naturelle: si X est bien disposé dans L^1, l'espace $(X^{\perp\perp} \cap L_s^1)$ est-il ω^*-fermé dans L^{1**}? Il est clair que ce n'est pas toujours vrai; il suffit de prendre $X = L^1(\mu)$, où μ est non-atomique. Nous allons voir qu'une réponse positive est liée *à* l'existence d'une topologie localement convexe moins fine que la topologie d_μ de la convergence en mesure, sur la boule unité X_1 de X.

Si Y est un sous-espace de L^{1*} qui sépare L^1, on note σ_Y la topologie, définie sur L^1, de la convergence simple sur Y.

DEFINITION 5. Soit X un sous-espace bien disposé de $L^1(\mu)$. On dira que X est un *H-espace* s'il existe $Y \subset L^{1*}$ séparant L^1 tel que la topologie induite sur X_1 par σ_Y soit moins fine que la topologie d_μ induite par $L^0(\mu)$.

Le théorème suivant donne les premières propriétés des H-espaces et montre qu'il n'y a essentiellement qu'une topologie σ_Y possible.

THEOREME 6. *Soit X un sous-espace bien disposé de $L^1(\mu)$. On pose $X_s = (X^{\perp\perp} \cap L_s^1)$. On suppose qu'il existe $Y \subset L^{1*}$ séparant L^1, tel que $d_\mu > \sigma_Y$ sur X_1. On a alors*:

(1) *Y est un sous-espace de $(X_s)_\perp$.*

(2) *L'espace X_s est ω^*-fermé dans X^{**}.*

(3) *X_1 est compacte pour la topologie $\sigma_{(X_s)_\perp}$.*

(4) *La topologie σ_Y coïncide sur $S_1(X)$ avec la topologie faible $\sigma_{L^{1*}} = \omega$.*

En d'autres termes, il existe au plus une topologie τ localement convexe séparée sur X_1 moins fine que d_μ, et X_1 est τ-compacte si cette topologie existe.

DEMONSTRATION. On a le

LEMME 7. *Soit (f_α) un ensemble filtrant dans $L^1(\mu)$ tel que $f_\alpha \cdot d\lambda \xrightarrow{\mathscr{F}} \nu \in L_s^1$ dans $(L^1(\mu)^{**}, \omega^*)$ et tel que $\|f_\alpha\| \leqslant \|\nu\|$ pour tout α. On a alors $\lim_{\mathscr{F}} f_\alpha = 0$ dans $L^0(\mu)$.*

DEMONSTRATION. On peut supposer $\|\nu\| = 1$. Soient $\varepsilon > 0$, et $\mathscr{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathscr{F}$. Il faut montrer que

$$\lim_{\alpha \to \mathscr{U}} \mu\left\{w \in \Omega \,|\, |f_\alpha(w)| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe $X \in \mathscr{U}$ et $\eta > 0$ tels que

$$\mu\left\{|f_\alpha(x)| > \varepsilon\right\} \geqslant \eta \quad \forall\alpha \in X.$$

Puisque $\nu \in L_s^1(\mu)$, il existe A_0 mesurable dans Ω tel que

$$\mu(A_0) < \eta/2, \quad |\nu|(\chi_{A_0}) > 1 - \varepsilon\eta/3.$$

Il existe donc $X' \in \mathscr{U}$ tel que

$$\forall\alpha \in X', \quad \int_{A_0} |f_\alpha| d\mu > 1 - \frac{\varepsilon\eta}{3}$$

on a donc, pour tout $\alpha \in X \cap X'$,

$$\|f_\alpha\|_1 = \int_{A_0} |f_\alpha| d\mu + \int_{\Omega \setminus A_0} |f_\alpha| d\mu \geqslant 1 - \frac{\varepsilon\eta}{3} + \frac{\varepsilon\eta}{2} > 1$$

ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Soit alors Y tel que $d\mu > \sigma_Y$ sur X_1. Soit $y \in Y$, et $\nu \in X_s = X^{\perp\perp} \cap L^1_s$, de norme 1. Il existe une famille (x_α) dans X_1 telle que $x_\alpha \xrightarrow{\mathscr{U}} \nu$ dans (L^{1**}, ω^*); d'après le Lemme 7, on a $x_\alpha \to 0$ dans $L^0(\mu)$, donc $x_\alpha \xrightarrow{\sigma_Y} 0$, d'où $\lim_{\alpha \to \mathscr{U}} y(x_\alpha) = y(\nu) = 0$; par conséquent $Y \subseteq (X_s)_\perp$, d'où (1).

On a d'autre part $(Y^\perp \cap X^{\perp\perp}) \supseteq X_s$, et $(Y^\perp \cap X^{\perp\perp}) \cap X = \{0\}$, puisque Y sépare L^1; puisque $X^{\perp\perp} = X \oplus X_s$, un peu d'algèbre linéaire montre que $X_s = Y^\perp \cap X^{\perp\perp}$, donc que X_s est ω^*-fermé dans $X^{\perp\perp}$, d'où (2).

Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble filtrant dans X_1, $\mathscr{U}$ un ultrafiltre. Soit $x = \lim_{\alpha \to \mathscr{U}} x_\alpha$ dans (X^{**}, ω^*). Ecrivons $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in X$, $x_1 \in X_s$; on a $\|x\| \leqslant 1$, donc $\|x_0\| \leqslant 1$; de plus $f(x) = f(x_0)$ pour tout $f \in (X_s)_\perp$, ce qui montre que $x_0 = \lim_{\alpha \to \mathscr{U}} x_\alpha$ pour la topologie séparée $\sigma_{(X_s)_\perp}$, d'où (3).

La topologie σ_Y est séparée, donc coïncide avec $\sigma_{(X_s)_\perp}$ sur X_1 par compacité. Montrer (4) revient à montrer que tout point de $S_1(X)$ est un point de continuité de Id: $(X_1, \sigma_Y) \to (X_1, \omega)$. Soit (x_α) dans X_1, $(x_\alpha) \xrightarrow{\mathscr{U}} x$, $\|x\| = 1$, pout $\sigma_Y = \sigma_{(X_s)_\perp}$, et considérons $y = \lim_{\alpha \to \mathscr{U}} x_\alpha$ dans (X_1^{**}, ω^*). Il est facile de voir que $(y - x) \in [(X_s)_\perp]^\perp = X_s$; donc $y = x + x_s$, avec $x_s \in X_s$. On a alors $\|y\| = \|x\| + \|x_s\|$, mais $\|x\| = 1$ et $\|y\| \leqslant 1$, donc $\|x_s\| = 0$ et $y = x$; ce qui veut dire que $x_\alpha \xrightarrow{\mathscr{U}} x$ dans (X_1, ω). C.Q.F.D.

Les premiers exemples de H-espaces sont les sous-espaces reflexifs de L^1; il est en effet facile de vérifier que sur la boule unité d'un sous-espace reflexif, la topologie induite par L^0 coïncide avec la topologie forte. Nous verrons ci-dessous d'autres exemples; notons cependant qu'il suffit de considérer le sous-espace de $L^1([0,1]; dx)$ engendré par les fonctions de Rademacher pour voir que dans l'assertion (4) du Théorème 6, on ne peut pas remplacer la topologie faible par la topologie forte.

Le résultat suivant, de nature générale, montre l'usage qu'on peut faire de H-espaces.

PROPOSITION 8. *Soit E un sous-espace fermé d'un espace $\mathscr{C}(K)$, tel que*

(1) *Il existe $\mu \in \mathscr{M}(K)$ tel que $E^\perp \subseteq L^1(\mu)$ et tel que $E^\perp$ soit bien disposé dans $L^1(\mu)$.*

(2) *Sur la boule unité de $E^\perp$, la topologie induite par $L^0(\mu)$ est plus fine que la topologie vague.*

Alors pour tout sous-espace fermé X de $\mathscr{C}(K)$ contenant E, on a X^* f.s.c.

DEMONSTRATION. Soit X tel que $E \subseteq X \subseteq \mathscr{C}(K)$. L'espace $X^\perp$ est un sous-espace ω^*-fermé de $E^\perp$; la boule unité $X_1^\perp$ de $X^\perp$ est ω^*-fermée dans $E_1^\perp$, donc fermée dans $(E_1^\perp, d_\mu)$. Comme $E_1^\perp$ est fermée dans $L^0(\mu)$ d'après (1), $X_1^\perp$ est fermée dans $L^0(\mu)$, donc $X^\perp$ est bien disposé. D'après le Théorème 3, l'espace $L^1(\mu)/X^\perp$ est f.s.c., ce qui termine la démonstration puisque $X^* = L^1(\mu)/X^\perp \oplus \mathscr{M}_s(\mu)$. C.Q.F.D.

II. Applications. (1) *Algèbres uniformes.* On emploie ici la terminologie et les résultats de [**6** ou **19**]. La notation $\mathscr{P}(K)$ désigne le convexe des mesures de probabilité sur K. La théorie ci-dessus nous permet de déduire de résultats plus anciens sur les ensembles pics le

THEOREME 9 [**8**, **35**]. *Soit A une algèbre uniforme sur un compact K, et $A^\perp \subset \mathscr{M}(K)$. On suppose que*:

(1) *Tout $\phi \in$ Spec(A) admet une unique mesure représentative $\mu \in \mathscr{P}(K)$.*

(2) *$A^\perp$ ne contient pas de mesure étrangère à toute mesure représentative.*

Alors A^* est f.s.c.

DEMONSTRATION. Sous ces hypothèses, on a $A^* = \oplus_{\mu \in M} L^1(\mu)/H_0^1(\mu) \oplus_1 \mathscr{M}_s(K)$, où $\oplus_\mu$ est étendue à une famille maximale M de mesures représentatives étrangères 2 à 2 [**6**, p. 227]. Il suffit donc de montrer que $L^1(\mu)/H_0^1(\mu)$ est f.s.c. pour toute $\mu \in M$. Ceci se déduit du Théorème 3 et du

LEMME 10. *Soit A une algèbre uniforme sur K, et $\mu \in \mathscr{M}(K)$ une mesure représentative unique. Alors $H_0^1(\mu)$ est bien disposé dans $L^1(\mu)$.*

DEMONSTRATION. Notons λ_r la partie μ-absolument continue d'une mesure λ; sous ces hypothèses, $H^\infty(\mu) = H_0^1(\mu)^\perp$ est une algèbre Log-modulaire sur le spectre Δ de $L^\infty(\mu)$ [**6**, p. 212]. Si $\lambda = \lambda_r + \lambda_s \in H_0^1(\mu)^{\perp\perp}$, il faut montrer que $\lambda_r \in H_0^1(\mu)$, ce qui est vrai d'après [**6**, p. 217]; en effet μ est mesure représentative unique sur Δ pour $H^\infty(\mu)$ par Log-modularité. C.Q.F.D.

REMARQUES. (a) La démonstration montre en fait que A^* est L-facteur dans A^{***}.

(b) Le théorème ci-dessus sera amélioré au §IV (Théorème 33).

EXEMPLES. Le Théorème 9 s'applique à l'algèbre du disque $A(D)$ ou plus généralement aux algèbres

$$A(K) = \{f \in \mathscr{C}(K) | f_{|\dot{K}} \in \mathscr{H}(\dot{K})\}$$

où K désigne un compact de $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{C} \setminus K$ ait un nombre fini de composantes connexes.

Notons que dans ce cas on *n*'a *pas* unicité des mesures représentatives. Cependant, il découle des résultats de [**8**] que le Lemme 10 reste valide dans ce cas, ainsi que l'hypothèse (2) du Théorème 9, ce qui permit d'appliquer notre méthode. D'autres exemples sont donnés dans [**6**].

Notons qu'en général, le dual d'une algèbre uniforme n'est pas f.s.c.; en effet ([**25**] et F. Delbaen, communication personnelle), pour tout espace de Banach X, il existe une algèbre uniforme A_X tel que X soit facteur direct dans A_X.

(2) *Analyse harmonique.* On va employer les résultats du §I pour ramener certains aspects de l'analyse harmonique sur les groupes compacts abeliens connexes au cadre "unidimensionnel" traité dans [**18**], ce qui permet d'éviter les difficultés liées à l'emploi des fonctions analytiques de plusieurs variables.

On emploi ici la terminologie et les résultats de [**32**, Chapter 8]. Si Γ est un groupe abelien discret, on appelera *demi-groupe* l'ensemble Γ^+ des éléments positifs de Γ pour un certain ordre total sur Γ compatible avec la structure de groupe; un tel ordre existe si et seulement si $G = \hat{\Gamma}$ est connexe [**32**, Chapter 8].

DEFINITION 11. Soit G un groupe abelien compact et connexe, et $\Gamma = \hat{G}$. On appelle *cône saillant* dans Γ toute intersection de semi-groupes de Γ qui soit bien ordonné pour un certain ordre total compatible sur Γ.

EXEMPLES. Soit $G = \mathbf{T}^n$ $(n \in N)$. Un "cône saillant" de $\mathbf{Z}^n$ est l'intersection de $\mathbf{Z}^n$ avec un cône convexe saillant de $\mathbf{R}^n$, d'où la terminologie.

Soit $G = \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$. Il est facile de vérifier que $\mathbf{Z}^{+[\mathbf{N}]}$ est un cône saillant de $\mathbf{Z}^{[\mathbf{N}]}$.

THEOREME 12. *Soit G un groupe abelien compact et connexe. Soit C un cône saillant de $\Gamma = \hat{G}$. L'espace $\mathscr{M}_c(G) = L_c^1(G)$ est un H-espace.*

DEMONSTRATION. L'équation $\mathscr{M}_c(G) = L_c^1(G)$ signifie que l'on a

$$\mu \in \mathscr{M}(G) \cdot \hat{\mu}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus C \Rightarrow \mu \ll m$$

où m désigne la mesure de Haar de G; ceci se fait par une adaptation directe de la démonstration de [**32**, Théorème 8.2.5]. Montrons que $L_c^1(G)$ est bien disposé dans $L^1(G, m)$. On a $C = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$, où les (P_α) sont des demi-groupes de Γ. On a donc

$$L_c^1(G) = \bigcap_{\alpha \in A} L_{P_\alpha}^1(G).$$

Par le Lemme 1, il suffit de montrer que $L_{P_\alpha}^1(G)$ est bien disposé pour tout α, or, d'après [**18**], cet espace est un espace $H^1(\mu)$ correspondant à une mesure représentative unique (ici $\mu = m$), qui est bien disposé par le Lemme 10.

Montrons à présent que la topologie induite par $L^0(m)$ est plus fine que la topologie vague sur la boule unité.

LEMME 13. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans la boule unité de $L^1(\Omega, \mu)$, qui tend vers zéro dans $(L^0(\Omega, \mu), d\mu)$. On a alors* $\lim_{n \to +\infty} \exp(\int_\Omega \operatorname{Log}|f_n|\, d\mu)$.

(Nota: si $\operatorname{Log}|f| \notin L^1$, on pose $\exp(\int \operatorname{Log}|f|) = 0$.)

DEMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \mu\{\omega \in \Omega \| f_n(\omega)| \leqslant \varepsilon^2/16\} \geqslant 1/2.$$

Soit donc $n \geqslant N$, et considérons un ensemble mesurable A de Ω tel que $\mu(A) = \frac{1}{2}$, et tel que $|f_n| \leqslant \varepsilon^2/16$ sur A. On a

$$\exp\left(\int_\Omega \operatorname{Log}|f_n| d\mu\right) = \exp\left(\int_A \operatorname{Log}|f_n| d\mu\right) \cdot \exp\left(\int_{\Omega \setminus A} \operatorname{Log}|f_n| d\mu\right)$$

on a $\int_A \operatorname{Log}|f_n|\, d\mu \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Log} \varepsilon^2/16 = \operatorname{Log} \varepsilon/4$ d'où $\exp(\int_A \operatorname{Log}|f_n|\, d\mu) \leqslant \varepsilon/4$. D'autre part

$$\exp\left(\int_{\Omega \setminus A} \operatorname{Log}|f_n| d\mu\right) = \exp\left(2 \int_{\Omega \setminus A} \operatorname{Log}(|f_n|)^{1/2} d\mu\right)$$

donc d'aprés l'inégalité de Jensen

$$\exp\left(\int_{\Omega \setminus A} \operatorname{Log}|f_n| d\mu\right) \leqslant 2 \int_{\Omega \setminus A} |f_n|^{1/2} d\mu \leqslant 2 \int_{\Omega \setminus A} (1 + |f_n|)\, d\mu \leqslant 4.$$

On a donc pour tout $n \geqslant N$, $\exp(\int_\Omega \operatorname{Log}|f_n|\, d\mu) \leqslant \varepsilon$. C.Q.F.D.

Considérons à présent un ordre $>$ sur Γ tel que C soit bien ordonné par $\succ$, et soit $\Gamma^+ = \{\gamma \in \Gamma | \gamma \geqslant 0\}$. On a $C \subseteq \Gamma^+$ donc $L_c^1(G) \subseteq L_{\Gamma^+}^1(G)$, et d'après [**32**, Théorème 8.4.1].

$$\forall f \in L^1_c(G), \quad |\hat{f}(0)| \leqslant \exp\left(\int_G \operatorname{Log}|f|\, dm\right).$$

Le Lemme 13 montre alors que l'application $f \to \hat{f}(0)$ est continue sur la boule unité de $L^1_c(G)$ munie de la topologie induite par $L^0(G, m)$. Soit $\gamma_0 = \min(C \setminus \{0\})$. L'ensemble $C' = (C \setminus \{0\}) - \gamma_0$ est contenu dans Γ^+, et [32, Théorème 8.4.1] montre avec le Lemme 13 que $f \to \hat{f}(\gamma_0)$ est continue sur la boule unité de L^1_c munie de la topologie induite par L^0. En poursuivant par récurrence (C bien ordonné), on obtient la continuité de $f \to \hat{f}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in C$. Or, la boule unité de $L^1_c(G)$ est vaguement compacte, puisque $L^1_c(G) = \mathscr{M}_c(G)$, et les $\varphi_\gamma: f \mapsto \hat{f}(\gamma)$ $(\gamma \in C)$ séparent $L^1_c(G)$, donc la topologie vague sur la boule unité de $L^1_c(G)$ coïncide avec la convergence simple des $\hat{f}(\gamma)$ $(\gamma \in C)$; la topologie induite par L^0 est donc plus fine que la topologie vague sur la boule unité. C.Q.F.D.

Rappelons qu'on note $\mathscr{C}_E(G) = \{f \in \mathscr{C}(G) | \hat{f}(\gamma) = 0\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus E\}$. On a alors

COROLLAIRE 14. *Soit C un cône saillant dans Γ. Soit X un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(G)$ contenant $\mathscr{C}_{\Gamma \setminus C}(G)$. Alors X^* est f.s.c.*

DEMONSTRATION. L'espace $\mathscr{C}_{\Gamma\setminus C}(G)^\perp = \mathscr{M}_{-C}(G) = L^1_{-C}(G)$ est un H-espace d'après le Théorème 12, il suffit alors d'appliquer la Proposition 8. C.Q.F.D.

EXEMPLE. Soit $G = \mathbf{T}$, $\Gamma = \mathbf{Z}$, $C = \mathbf{Z}^-$. D'après le Corollaire 14, pour tout sous-espace fermé X de $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ contenant $A_0(D)$, on a X^* f.s.c.

Notons que dans le Corollaire 14, on ne suppose pas l'espace X invariant par translation. Si on se limite aux espaces invariants par translation, on obtient

COROLLAIRE 15. *Soit E un sous-ensemble de Γ dont un translaté est contenu dans un cône saillant. Alors l'espace $\mathscr{C}_{\Gamma\setminus E}(G)^*$ est f.s.c.*

EXEMPLES. Soit $G = \mathbf{T}^n$, $\Gamma = \mathbf{Z}^n$. On considère l'ordre canonique sur $\mathbf{Z}^n$: $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \geqslant 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ z_i \geqslant 0$. Si E est une partie de $\mathbf{Z}^n$ majorée, ou minorée, pour cet ordre, l'espace $\mathscr{C}_{\mathbf{Z}^n \setminus E}(\mathbf{T}^n)^*$ est f.s.c.; ce résultat se prolonge au cas $G = \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$, $\Gamma = \mathbf{Z}^{[\mathbf{N}]}$.

Explicitons un cas particulier important. On considère (voir [6, Chapter 4])

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{T}^n) &= \left\{ f \in L^1(\mathbf{T}^n, dm) \middle| \operatorname{Support}(f) \subset \mathbf{Z}^{+n} \right\} \\ &= \overline{A(D^n)} \quad \text{dans } L^1(\mathbf{T}^n, dm) \end{aligned}$$

où $\overline{A(D^n)}$ désigne l'adhérence de l'espace $\{f_{\mathbf{T}^n} | f \in A(D^n)\}$ dans l'espace normé $L^1(\mathbf{T}^n, dm)$.

On a alors

COROLLAIRE 16. *Soit $n \in \mathbf{N}$. L'espace $H^1(\mathbf{T}^n)$ est un H-espace de $L^1(\mathbf{T}^n)$. En particulier, l'espace $L^1(\mathbf{T}^n)/H^1(\mathbf{T}^n)$ est f.s.c.*

REMARQUES. J. Bourgain [5] a montré récemment que les espaces $A(B_n)^*$ et $A(D^n)^*$ sont f.s.c., en employment des méthodes constructives très différentes des méthodes employées ici; il est vraisemblable qu'une adaption de ses méthodes permettrait de retrouver certains des résultats ci-dessus.

Soit $\mathscr{E} = \{E \subset \Gamma \mid \mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}(G)^* \text{ f.s.c.}\}$. Il faut noter que même en dimension 1, l'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas stable par réunion (considérer $E_1 = \mathbf{Z}^-$, $E_2 = \mathbf{Z}^+ \setminus S$, où S est un ensemble de Sidon).

Le Corollaire 15 se traduit de la façon suivante

COROLLAIRE 17. *Soit E un sous-ensemble de Γ dont un translaté est contenu dans un cône saillant. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $L^1(G, m)$ telle que*

$$L(\varphi) = \lim_{n \to +\infty} \int_G f_n \varphi \, dm$$

existe pour tout $\varphi \in L^\infty_{\Gamma \setminus E}(G)$. Il existe alors $f \in L^1(G)$ telle que $L(\varphi) = \int_G f\varphi \, dm$ pout tout $\varphi \in L^\infty_{\Gamma \setminus E}(G)$.

DEMONSTRATION. On a $\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}(G)^* = L^1(G)/L^1_{-E}(G) \oplus \mathscr{M}_s(G)$ d'où

$$\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}(G)^{**} = L^\infty_{\Gamma \setminus E}(G) \oplus \mathscr{M}_s(G)^*.$$

Considérons la suite $(\dot{f}_n)$ des classes de (f_n) dans $L^1(G)/L^1_{-E}(G)$. D'après l'hypothèse, la suite $(\dot{f}_n)$ est faiblement de Cauchy dans L^1/L^1_{-E}, et donc elle converge dans cet espace par le Corollaire 15; il existe donc $\dot{f} \in L^1/L^1_{-E}$ tel que $L(\varphi) = \langle \varphi, \dot{f} \rangle$ pour tout $\varphi \in L^\infty_{\Gamma \setminus E}$. Il suffit alors de choisir un représentant $f \in L^1$ de $\dot{f}$. C.Q.F.D.

REMARQUE. Il convient de noter l'analogie entre les resultats présentés dans cette partie et certains résultats de **[29]**.

(3) *Fonctions de plusieurs variables complexes.* Le Corollaire 16 exprime le caractère f.s.c. de l'espace $L^1/H^1(D^n)$, où le poly-disque D^n peut être vu comme une boule unité particulière de $\mathbf{C}^n$. Nous allons voir que ce résultat s'étend à des boules unités "lisses" de $\mathbf{C}^n$, parmi lesquelles la boule euclidienne B_n. Commençons par définir convenablement les espaces H^1 que nous allons étudier. Le lemme ci-dessous emploie des idées bien connues. Rappelons qu'un fermé borné U de $\mathbf{C}^n$ est dit "strictement pseudo-convexe avec une frontière $\mathscr{C}^2$" s'il existe une fonction réelle ρ de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un voisinage Ω de U telle que

$$U = \{z \in \Omega \mid \rho(z) \leqslant 0\}, \qquad U = \{z \in \Omega \mid \rho(z) = 0\}$$

grad $\rho \neq 0$ en tout point de ∂U, et

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \omega_j \bar{\omega}_k > 0$$

$\forall z \in \partial U$, $\forall (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} \omega_j = 0$$

(voir **[28]**, Notes to section 11]). D'après **[27]**, il existe alors un noyau $K = (U \setminus \partial U) \times \partial U \to \mathbf{C}$ continu tel que pour toute fonction f continue sur U et analytique à l'intérieur, on ait

$$\forall z \in U \setminus \partial U, \quad f(z) = \int_{\partial U} K(z, \omega) f(\omega) \, d\sigma(\omega)$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface sur ∂U.

LEMME 18. *Soit U la boule unité d'une norme sur $\mathbf{C}^n$. On suppose que U est strictement pseudo-convexe à frontière $\mathscr{C}^2$. Alors*:

(1) *Soit $f \in \mathscr{H}(\mathring{U})$ telle que $\sup_{r<1} \int_{\partial U} |f(rz)|\, d\sigma(z) < \infty$. On a alors*

$$f^*(z) = \lim_{r \to 1} f(rz)$$

existe σ-presque partout, et on a $\|f^* - f_r\| \overset{r\to 1}{\to} 0$ dans $L^1(\partial U, \sigma)$.

(2) *Si $f \in \overline{A(U)}$ dans $L^1(\partial U, \sigma)$, on a $f = g^*$, où*

$$g(z) = \int_{\partial U} K(z, \omega) f(\omega)\, d\sigma(\omega) \tag{$*$}$$

et on a $\sup_{r<1} \int |g(rz)|\, d\sigma(z) < \infty$.

DEMONSTRATION. (1) Soit $f \in \mathscr{H}(\mathring{U})$ telle que $\int_{\partial U} |f(rz)|\, d\sigma(z) \leqslant 1$ pour tout $r < 1$. On a:

$$\forall r < 1 \quad \int_{\partial U} d\sigma(\omega) \cdot \int_{\mathbf{T}} |f(r\alpha\omega)| dm(\alpha) = \int_{\mathbf{T}} \left[\int_{\partial U} |f(r\alpha\omega)| d\sigma(\omega) \right] dm(\alpha)$$

$$= \int_{\partial U} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) \leqslant 1$$

d'après l'invariance de $d\sigma$ la multiplication par α. La fonction $r \mapsto \int_{\mathbf{T}} |f(r\alpha\omega)|\, dm(\alpha)$ étant croissante pour tout ω par sous-harmonicité, on a

$$\lim_{r \to 1} \int_{\mathbf{T}} |f(r\alpha\omega)| dm(\alpha) < \infty \quad \sigma\text{-presque partout.}$$

Donc pour σ-presque tout $\omega \in \partial U$, la fonction $\psi_\omega(z) = f(z\omega)$ $(|z| < 1)$ est dans $H^1(D)$. On en déduit (cf. [**34**, Chapter 17]) que pour $\omega \in A \subseteq \partial U$ de complémentaire σ-négligeable, il existe $K_\omega \subseteq \mathbf{T}$ tel que $m(\mathbf{T} \setminus K_\omega) = 0$, et tel que $\lim_{r \to 1} f(r\alpha\omega)$ existe pour tout $\alpha \in K_\omega$. Soit alors

$$K = \left\{ z \in \partial U \,\middle|\, \lim_{r \to 1} f(rz) \text{ existe} \right\}.$$

On a

$$\int_{\partial U} \mathbf{1}_K\, d\sigma(\omega) = \int_{\partial U} d\sigma(\omega) \cdot \int_{\mathbf{T}} \mathbf{1}_K(\alpha\omega)\, dm(\alpha)$$

$$= \int_A d\sigma(\omega) \cdot \int_{\mathbf{T}} \mathbf{1}_{K_\omega}(\alpha) d\, dm(\alpha) = 1.$$

Et donc $f^*(\omega) = \lim_{r \to 1} f(r\omega)$ existe pour σ-presque tout ω. En écrivant à nouveau

$$\int_{\partial U} |f^*(\omega)| d\sigma(\omega) = \int_{\partial U} d\sigma(\omega) \int_{\mathbf{T}} |f^*(\alpha\omega)| dm(\alpha)$$

on déduit du cas de la dimension 1 que

$$\int_{\partial U} |f^*(\omega)| d\sigma(\omega) \geqslant \int_{\partial U} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) \quad \forall r < 1. \tag{1}$$

Il est alors facile de montrer, comme dans [**33**, p. 52], que

$$\lim_{r \to 1} \|f(r.) - f^*\| = 0 \quad \text{dans } L^1(\partial U, \sigma).$$

(2) Soit (f_n) une suite de fonctions de $A(U)$, et $f = \lim_{n\to\infty} f_n|_{\partial U}$ dans $L^1(\partial U, \sigma)$. D'après [**27**], on a

$$\forall z,\ \|z\| < 1,\quad f_n(z) = \int_{\partial U} K(z,\omega) f_n(\omega)\, d\sigma(\omega).$$

Soit $r < 1$, et $K_r = \{z \in U \,|\, \|z\| \leqslant r\}$. On a $K(z,\omega) \leqslant M_r$ sur $K_r \times \partial U$, d'où convergence uniforme de (f_n) sur K_r. Si $\|f_n\|_1 \leqslant 1$ pour tout n, on a $\|f_n(r.)\|_1 \leqslant 1$ pour tout n et tout $r < 1$ par sous-harmonicité (formule (1)). Soit $g = \lim_{n\to\infty} f_n$ pour la topologie τ_k de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathring{U}$; on a $g \in \mathscr{H}(\mathring{U})$, et $\|g(r.)\|_1 \leqslant 1$ pour tout $r < 1$. Il est clair qu'on a la formule intégrale $(*)$ de l'énoncé du lemme. D'autre part, d'après le (1), on peut considérer $h = g^* = \lim_{r\to 1} g(r.)$ dans $L^1(\sigma)$; on a par sous-harmonicité (formule (1)).

$$\begin{aligned}\|f_n - f_k\| \leqslant \varepsilon \quad \forall n, k \geqslant N &\Rightarrow \|f_n(r.) - g(r.)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall n \geqslant N, \forall r < 1\\ &= \|f_n - h\| \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

d'où on déduit $f = h$. C.Q.F.D.

Considérons alors l'espace

$$H^1(U) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathring{U}) \,\middle|\, \sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\partial U} |f(rz)| d\sigma(z) d < \infty \right\}$$

normé par $\|f\| = \sup_{0\leqslant r<1} \int_{\partial U} |f(rz)|\, d\sigma(z)$. Il est clair, par le Lemme 18, que $H^1(U)$ s'identifie à l'adhérence de $A(U)$ dans $L^1(\partial U, \sigma)$. On va montrer que $H^1(U)$ est un H-espace.

LEMME 19. *La boule unité de $H^1(U)$ est compacte pour la topologie τ_K de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathring{U}$.*

DEMONSTRATION. Soit (f_n) une suite dans la boule unité de $H^1(U)$. Par la formule intégrale $(*)$, la suite (f_n) est uniformément bornée sur les compacts de $\mathring{U}$, et forme donc une famille normale de fonctions holomorphes; on peut donc en extraire une sous-suite $(f_{n'})$ τ_K-convergente vers une fonction g qui appartient clairement à la boule unité de $H^1(U)$. C.Q.F.D.

THEOREME 20. *Soit U satisfaisant les hypothèses du Lemme* 18. *Alors l'espace $H^1(U)$ est un H-espace.*

DEMONSTRATION. Soit (h_n) une suite dans la boule unité B de $H^1(U)$, telle que h_n^* converge dans $L^0(\sigma)$ vers $\varphi \in L^0(\sigma)$. On va montrer que $h_n \to \tilde{\varphi}$ pour τ_K, ce qui montrera en même temps que $H^1(U)$ est bien disposé et est un H-espace. En considérant éventuellement une sous-suite extraite, on peut supposer que $h_n \to \varphi_0 \in B$ pour τ_K, d'après le Lemme 19; en considérant la suite $(h_n - \varphi_0)$ on est ramené à montrer: si h_n est une suite dans B qui tend vers 0 pour τ_K, et telle que h_n^* tende vers ψ dans $L^0(\sigma)$, alors $\psi = 0$. On voit comme dans le Lemme 1 que sur B, les topologies induites par $L^0(\sigma)$ et $L^{1/2}(\sigma)$ (par exemple) coïncident. Soit $\varepsilon > 0$, et N t.q.

$$n, m \geqslant N \Rightarrow \int_{\partial U} |h_n - h_m|^{1/2}\, d\sigma \leqslant \varepsilon^{1/2}$$

par sous-harmonicité, on a

$$n, m \geqslant N \Rightarrow \int_{\partial U} |h_n(r\omega) - h_m(r\omega)|^{1/2} \, d\sigma(\omega) \leqslant \varepsilon^{1/2} \quad \forall r < 1$$

en faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit

$$\forall n \geqslant N, \quad \int_{\partial U} |h_n(r\omega)|^{1/2} \, d\sigma(\omega) \leqslant \varepsilon^{1/2} \quad \forall r < 1$$

en faisant tendre r vers 1, on a

$$\forall n \geqslant N, \quad \int_{\partial U} |h_n(\omega)|^{1/2} \, d\sigma(\omega) \leqslant \varepsilon^{1/2}$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on a

$$\int_{\partial U} |\psi(\omega)|^{1/2} \, d\sigma(\omega) \leqslant \varepsilon^{1/2}$$

ceci pour tout ε, d'où $\psi = 0$. C.Q.F.D.

EXEMPLE. La boule euclidienne $U = B_n$ satisfait aux hypothèses; l'espace $H^1(B_n)$ est donc un H-sous-espace de $L^1(S_n, \sigma)$, où σ désigne la probabilité invariante par rotation sur S_n.

REMARQUE. La démonstration faite s'adapte immédiatement au cas de D^n (on considère alors σ = mesure de Haar sur $\mathbf{T}^n$), et donne une démonstration directe de: $L^1/H^1(D^n)$ f.s.c. Cette démonstration est particulièrement simple dans le cas $n = 1$, où elle se réduit à la démonstration du Théorème 20 et aux propriétés classiques de L^1/H^1.

COROLLAIRE 21. *Soit U satisfaisant les hypothèses du Lemme* 18. *Alors $L^1(\partial U, \sigma)/H^1(U)$ est f.s.c.*

DEMONSTRATION. C'est immédiat par les Théorèmes 3 et 20. C.Q.F.D.

On n'emploie ci-dessus que la bonne disposition de $H^1(U)$. Voyons ce qu'on peut déduire de la notion de H-espace. Le résultat suivant est une extension de [**26** et **36**].

THEOREME 22. *Soit U satisfaisant les hypothèses du Lemme* 18, *ou $U = D^n$. Soit (f_n) une suite de $H^1(U)$, et $f \in H^1(U)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

(2) *La suite $(f_n(z))$ tend vers $f(z)$ pour tout $z \in \mathring{U}$—resp. $(\mathring{D})^n$—et on a* $\|f_n\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} \|f\|_1$.

DEMONSTRATION. On fait la démonstration pour U comme dans le Lemme 18; le cas $U = D^n$ est identique. Par compacité (Lemme 19), la topologie de la convergence simple sur $\mathring{U}$ coïncide sur la boule unité de $H^1(U)$ avec la topologie τ_K.

(1) $\Rightarrow$ (2) est évident.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pour tout $f \in L^1(\partial U)$, posons

$$F^\omega(\alpha) = f(\alpha\omega), \quad \alpha \in D, \qquad \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbf{T}} F^\omega(\alpha) \, dm(\alpha).$$

On se ramène au cas où $\|f\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_1 \leqslant 1$ pour tout n. On a comme précédemment

$$\int_{\partial U} d\sigma(\omega) \int_{\mathbf{T}} F^{\omega}(\alpha)\, dm(\alpha) = \int_{\partial U} \tilde{f}(\omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{\partial U} f(\omega)\, d\sigma(\omega).$$

On en déduit

$$(1) \qquad \forall n, \quad \int_{\partial U} d\sigma(\omega) \int_{\mathbf{T}} |F_n^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha) \leqslant \int_{\partial U} d\sigma(\omega) \int_{\mathbf{T}} |F^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha).$$

De plus, on a $\lim_{n\to\infty} F_n^{\omega} = F^{\omega}$ dans $(H^1(D), \omega^*)$ pour tout ω—car on a convergence simple sur D. On en déduit

$$(2) \qquad \forall \omega \in \partial U, \quad \underline{\lim} \int_{\mathbf{T}} |F_n^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha) \geqslant \int_{\mathbf{T}} |F^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha).$$

D'après (1) et (2), on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{T}} |F_n^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha) = \int_{\mathbf{T}} |F^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha).$$

Pour σ-presque tout ω. D'après **[26]**, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{T}} |F_n^{\omega}(\alpha) - F^{\omega}(\alpha)|\, dm(\alpha) = 0.$$

Pour σ-presque tout ω. Posons $g_n = (|f_n - f|)\tilde{}$. D'après l'équation ci-dessus, on a $g_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ σ-presque partout. D'autre part, la suite $(|f_n - f|)$ est équi-intégrable; en effet $f_n \overset{\omega^*}{\to} f$, $\|f_n\| \leqslant \|f\|$, et l'espace $H^1(U)$ est un H-espace; on applique alors le théorème 6(4). Or, on a A équi-intégrable $\Rightarrow \tilde{A}$ équi-intégrable, où $A = \{\tilde{f} \mid f \in A\}$. En effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $\eta > 0$ tel que

$$\sigma(E) < \eta \Rightarrow \int_E |f| \leqslant \varepsilon \quad \forall f \in A.$$

On a

$$\int_E |\tilde{f}|\, d\sigma \leqslant \int_E d\sigma(\omega) \int_{\mathbf{T}} |f(\alpha\omega)|\, dm(\alpha) = \int_{\mathbf{T}} dm(\alpha) \int_E |f(\alpha\omega)|\, d\sigma(\omega) \leqslant \varepsilon.$$

La suite (g_n) est donc équi-intégrable, et tend σ-p.p. vers 0, d'où $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_1 = 0$. On a enfin

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial U} \left(|f_n - f|\right)\tilde{}\, d\sigma = \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial U} |f_n - f|\, d\sigma = 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque. La méthode employée ici consiste essentiellement à se ramener, par une méthode de "tranche", au cas de la dimension 1. Une analyse plus poussée de la situation montre qu'on peut étendre l'ensemble des résultats de cette section aux domaines U de $\mathbf{C}^n$ vérifiant l'une des hypothéses suivantes:

(1) U est un domaine de Cartan symétrique de $\mathbf{C}^n$.

(2) U est strictement pseudo-convexe à frontiére $\mathscr{C}^2$.

Cette extension est développée dans **[37]**.

III. Usage de la M-structure. Rappelons qu'un espace de Banach E est dit M-idéal de son bidual E^{**} si on a $E^{***} = E^* \oplus_1 E^\perp$, où la somme $\oplus_1$ ci-dessus est une l^1-somme (voir [**4**]). Nous allons voir le lien avec le travail ci-dessus.

LEMME 23. *Soit E un sous-espace d'un espace $L^1(\Omega, \mu)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) *E est bien disposé dans $L^1(\mu)$.*

(2) *E est L-facteur dans E^{**}.*

DEMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2) est évident.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit f et g deux éléments de $L^1(\Omega, \mu)$ tels que $\|\lambda f + \mu g\|_1 = |\lambda| + |\mu|$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Alors on a $|f| \wedge |g| = 0$ dans l'espace réticulé L^1. En effet, l'égalité $\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$ montre qu'on peut écrire $f(\omega) = \lambda(\omega) g(\omega)$ où $\lambda(\omega) \in \mathbf{R}$ pour μ-presque tout ω; on en déduit qu'on a, comme dans le cas réel, pour μ-presque tout ω

$$|f(\omega)| \wedge |g(\omega)| = |f(\omega)| + |g(\omega)| - \tfrac{1}{2}\big[|f(\omega) + g(\omega)| + |f(\omega) - g(\omega)|\big]$$

en intégrant sur $\omega \in \Omega$, on en déduit

$$\big\||f| \wedge |g|\big\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1 - \tfrac{1}{2}\big[\|f + g\|_1 + \|f - g\|_1\big]$$

d'où $\||f| \wedge |g|\|_1 = 0$ puisque $\|f + g\|_1 = \|f - g\|_1 = 2$, par conséquent $|f| \wedge |g| = 0$.

Soit à présent $E \subseteq L^1(\mu)$ tel que $E^{**} = E \oplus_1 E_s$. Il faut montrer que $E_s = E^{**} \cap L^1_s$. D'après le raisonnement ci-dessus, on a $|f| \wedge |\nu| = 0$ pour tout $f \in E$ et tout $\nu \in E_s$; on en déduit $h \perp \nu$ pour tout h appartenant à la bande $\mathscr{B}(E)$ engendrée par E dans $L^1(\mu)$ et tout $\nu \in E_s$. En considérant la projection de bande sur $\mathscr{B}(E)$, on se ramène au cas où $\mathscr{B}(E) = L^1(\mu)$; on a donc $\nu \in L^1_s$, donc $E_s \subseteq (E^{**} \cap L^1_s)$. Comme il est clair que $E \cap (E^{**} \cap L^1_s) = \{0\}$, on a $E_s = E^{**} \cap L^1_s$. C.Q.F.D.

On déduit de ce lemme

PROPOSITION 24. *Soit F un espace de Lindenstrauss, et E un sous-espace fermé de F. Soit $X = F/E$. Si X^* est L-facteur dans X^{***}, alors E^* est f.s.c.*

DEMONSTRATION. Rappelons que F est dit espace de Lindenstrauss si F^* est isométrique à un espace L^1 (voir [**20**]). On a $X^* = E^\perp \subseteq F^*$; d'après le Lemme 23, l'espace $E^\perp$ est bien disposé dans F^*; par le Théorème 3, on a $E^* = F^*/E^\perp$ f.s.c. C.Q.F.D.

EXEMPLE. Soit F un espace $\mathscr{C}(K)$, et E un sous-espace de F tel que F/E soit isométrique à un espace $\mathscr{C}(K')$. Alors l'espace E^* est f.s.c.

Il est clair qu'on ne peut pas remplacer E, dans la Proposition 24, par un espace G contenant E. On a cependant le résultat suivant, qui peut être vu comme une réponse positive très partielle à [**28**, Problem 8.3.].

PROPOSITION 25. *Soit F un espace de Lindenstrauss, et E un sous-espace fermé de F tel que F/E soit un M-idéal de son bidual. Alors pour tout espace fermé G tel que $E \subseteq G \subseteq F$, on a G^* f.s.c.*

DEMONSTRATION. Soit G tel que $E \subseteq G \subseteq F$. L'espace F/G est un quotient de F/E; or, la classe des espaces qui sont M-idéal de leur bidual est stable par quotient (voir [**4**]) donc F/G est M-idéal, donc $(F/G)^*$ est L-facteur dans son bidual; d'après la Proposition 24, on a G^* f.s.c. C.Q.F.D.

EXEMPLE. Si le quotient F/E est plongeable isométriquement dans $c_0(I)$, alors G^* est f.s.c. pour tout G tel que $E \subseteq G \subseteq F$; en effet la classe des M-idéaux dans leur bidual est héréditaire.

Soit $\tilde{I}$ l' "intervalle écalté" ("two-arrows space"—voir par exemple [**31**]). Soit $X = \{f \circ \varphi | f \in \mathscr{C}([0,1])\}$, où φ est la surjection naturelle de $\tilde{I}$ sur $[0,1]$. On a $\mathscr{C}(\tilde{I})/X \equiv c_0([0,1])$, donc G^* est f.s.c. pour tout sous-espace de $\mathscr{C}(\tilde{I})$ contenant X.

Le résultat ci-dessus, qui donne d'autres exemples, montre que la Proposition 8 est une conséquence de la Proposition 25.

PROPOSITION 26. *Soit E un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(K)$ tel que $E^\perp$ vérifie les hypothèses de la Proposition* 8. *Alors $\mathscr{C}(K)/E$ est un M idéal de son bidual.*

DEMONSTRATION. En effet, en reprenant la démonstration du Théorème 6(2), on voit que si l'on pose $X = E^\perp$, on a

$$(X^{**} \cap L_s^1) = X^{**} \cap \mathscr{C}(K)^\perp$$

et bien sûr $X^{**} = X \oplus_1 (X^{**} \cap L_s^1)$. Posons $Y = \mathscr{C}(K)/E$; on a alors clairement $Y^{***} = Y^* \oplus_1 Y^\perp$. C.Q.F.D.

EXEMPLES. D'après le Théorème 12, l'espace $H_0^1(\mathbf{T}) = A(D)^\perp$ vérifie les hypothèses de la Proposition 8; on retrouve le fait que $\mathscr{C}(\mathbf{T})/A(D)$ est un M-idéal de son bidual; ce résultat est montré dans [**23**], où l'on remarque, par l'usage des opérateurs de Hankel, que $\mathscr{C}(\mathbf{T})/A(D)$ est esométrique à un sous-espace de $\mathscr{K}(H)$, ce qui rend le résultat direct.

Plus généralement, avec les notations du §II, si C est un cône saillant de $\Gamma = \hat{G}$, on aura $\mathscr{C}(G)/\mathscr{C}_{\Gamma \setminus C}(G)$ M-idéal de son bidual.

REMARQUE. Contrairement aux résultats du type "$\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}(G)^*$ f.s.c." qui peuvent être satisfaits pour de "gros" sous-ensembles E de Γ (d'après [**5**]), le résultat "$\mathscr{C}/\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}$ M-idéal de son bidual" est typique des "petits" sous-ensembles E; à titre d'exemple, si $n > 1$, l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{T}^n)/A(D^n)$ n'est pas un espace d'Asplund (d'après [**28**, §11]) et n'est donc pas un M-idéal de son bidual.

APPLICATIONS. (1) *Meilleure approximation*. Soit E un cône saillant de $\Gamma = \hat{G}$. D'après [**10**] et la Proposition 26, il existe une projection de meilleure approximation (non linéaire) $p = L^\infty/L^\infty_{\Gamma \setminus E} \to \mathscr{C}/\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}$. On en déduit qu'il existe une sélection continue p_0: $L^\infty(G, m) \to \mathscr{C}(G)$ telle que pour tout $f \in L^\infty(G, m)$

$$\inf\left\{\|f - p_0(f) + h\| \,\middle|\, h \in L^\infty_{\Gamma \setminus E}\right\} = \inf\left\{\|f - g + h\| \,\middle|\, g \in \mathscr{C}(G), h \in L^\infty_{\Gamma \setminus E}\right\}.$$

Le cas $\Gamma = \mathbf{Z}$, $E = \mathbf{Z}^-$ est traité dans [**3**] et repris dans [**23**]. D'autre part, il n'existe pas de projection $(2 - \varepsilon)$-lipchitzienne de $L^\infty/L^\infty_{\Gamma \setminus E}$ sur $\mathscr{C}/\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}$ si $\varepsilon > 0$, car cela est vrai pour tout M-idéal de son bidual (P. Harmand; communication personnelle).

(2) *Interpolation*. A titre d'exemple, prenons $G = \mathbf{T}^n$, $E = \mathbf{Z}^{+n}$. D'après [**4**, p. 47], on a le résultat d'interpolation suivant: Soient $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans $L^\infty(\mathbf{T}^n)$, et $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

dans $\mathbf{R}_*^+$, tels que

(a) $\operatorname{dist}(f_i + L^\infty_{\mathbf{Z}^n \setminus (\mathbf{Z}^+)^n}, \mathscr{C}(\mathbf{T}^n)) < r_i$;

(b) $\exists g \in L^\infty(\mathbf{T}^n)$ t.q. $\forall i$, $\exists h_i \in L^\infty_{\mathbf{Z}^n \setminus (\mathbf{Z}^+)^n}(\mathbf{T}^n)$ avec

$$\|f_i - (g + h_i)\|_\infty < r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

On a alors $\exists g' \in \mathscr{C}(\mathbf{T}^n)$ t.q. $\forall i$, $\exists h'_i \in L^\infty_{\mathbf{Z}^n \setminus (\mathbf{Z}^+)^n}(\mathbf{T}^n)$ avec

$$\|f_i - (g' + h'_i)\| < r_i.$$

(3) *Non-unicité du prédual.* Nous dirons que E est unique prédual de E^* s'il existe une unique projection $\pi: E^{***} \to E^*$ de norme 1 telle que $\operatorname{Ker} \pi$ soit ω^*-fermé dans E^{***} (voir [**13**, **14**]). C'est équivalent à l'existence d'une unique topologie de convexe compact sur la boule unité E_1^* de E^*.

THEOREME 27. *Soit E un espace non reflexif, M-idéal de son bidual. L'espace E n'est pas unique prédual de son dual E^*.*

DEMONSTRATION. Posons

$$\mathscr{C} = \left\{ u \in E^{***} \middle| \|u - x\| \geq \|x\| \ \forall x \in E^* \right\}.$$

Soit X un sous-espace de E^{***} tel que $E^{***} = E^* \oplus X$. On vérifie immédiatement que la projection π_X de E^{***} sur E^* parallèlement à X est de norme 1 si et seulement si on a $X \subseteq \mathscr{C}$. Posons $A = S_1(E^{***}) \cap \complement\mathscr{C}$. Si E est M-idéal de son bidual, on vérifie facilement que

$$\operatorname{dist}(A, S_1(E^{***}) \cap E^\perp) = 1 \tag{1}$$

où la distance ci-dessus est prise dans l'espace des fermés de $S_1(E^{***})$ munie de la norme. Soit X un hyperplan ω^*-fermé de $E^\perp$; écrivons $E^\perp = X \oplus \mathbf{K}u$, où $u \in S_1(E^{***})$. On considère $v \in S_1(E^{***})$ tel que $\|u - v\| < 1$, $v \notin E^\perp$; soit $F = E^\perp \oplus \mathbf{K}v$. On a le

Claim. Soit F un espace de Banach, H un hyperplan de F, X un hyperplan de H; soit $\varepsilon > 0$; existe $v \in E \setminus H$ tel que $\operatorname{dist}(H, F \oplus \mathbf{K}v) < \varepsilon$, où la distance est prise dans l'espace des fermés de la boule unité F_1 munie de la norme.

On montre le "Claim" en remarquant que cette propriété ne dépend pas de la norme choisie sur F, et en normant F par $F = E \times_\infty (\mathbf{R}^2, \|\ \|_2)$.

On choisit alors $w \in F \setminus E^\perp$ tel que

$$\operatorname{dist}(E^\perp, X \oplus \mathbf{K}w) < 1/4 \tag{2}$$

dans l'espace des fermés de E_1^{***}. Posons $W = X \oplus \mathbf{K}w$. On déduit aisément de (2) que

$$\operatorname{dist}(A, S_1(E^{***}) \cap W) \leq 1/2.$$

et d'après (1), ceci implique que $W \subseteq \mathscr{C}$, donc que la projection π_W: $E^{***} \to E^*$ parallèlement à W est de norme 1. D'autre part, W est ω^*-fermé puisque X est ω^*-fermé, et $W \neq E^\perp$ puisque $w \notin E^\perp$. C.Q.F.D.

REMARQUES. (1) La démonstration faite montre en fait que l'espace E^* a une infinité de préduaux. En d'autres termes, il existe une infinité de sous-espaces 1-normants X de E^{**} tels que la boule unité E_1^* de E^* soit compacte pour $\sigma(E^*, X)$.

(2) On obtient ci-dessus un prédual $W_1 = W_\perp$ tel que $(W_1 \cap E)$ soit de codimension 1 dans E. D'après [**12**, Theoreme 13], ceci implique que E contient $c_0(\mathbf{N})$; on retrouve le fait que si E est M-idéal de son bidual et non reflexif, alors $E \supset c_0(\mathbf{N})$ [**17**]; plus généralement, si $\operatorname{dist}(A, S_1(E^{***}) \cap E^\perp) > 0$, on aura $E \supset c_0(\mathbf{N})$, avec la même démonstration.

(3) On vérifie facilement que si E est M-idéal de E^{**}, alors E est prédual "canonique" de E^* au sens où E est l'unique prédual de E^* tel que la projection π_E associée soit de meilleure approximation.

EXEMPLES. (1) Si C est un cône saillant de $\Gamma = \hat{G}$—avec les notations du §II—l'espace $L^1_c(G)$ a une infinité de préduaux.

(2) En particulier, l'espace $H^1(\mathbf{T})$ a une infinité de préduaux; on a ainsi un exemple naturel d'espace à norme Gâteaux-différentiable qui admet plusieurs préduaux.

(4) *Propriété d'approximation métrique*. D'après un résultat de Saphar (à paraître), si E est M-idéal de E^{**}, alors E a la propriété d'approximation métrique (voir [**22**, p. 37]) si et *seulement si* E^* a cette propriété; le travail ci-dessus fournit de nouveaux exemples d'application de ce résultat.

IV. La propriété (X) et l'unicite des preduaux. On dira qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'un Banach E est dite faiblement inconditionellement convergente (f.i.c.) si on a $\sum_{n=1}^{+\infty}|x(x_n - x_{n-1})| < \infty$ pour tout $x \in E^*$. Rappelons une

DEFINITION 28 [**12**]. On dit qu'un espace de Banach séparable E à la propriété (X) si on a, pour tout $x \in E^{**}$, l'équivalence:

(1) $x \in E$,

(2) $\lim_{n\to+\infty} x(x_n) = 0$ pour toute suite (x_n) f.i.c. de E^* telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ dans (E^*, ω^*).

On donne une définition analogue, en termes de familles f.i.c., dans le cas non séparable. Si E a la propriété (X), on a:

(1) E est unique prédual de son dual [**12**].

(2) Toute $f \in E^{**}$, borélienne sur (E^*, ω^*), appartient à E. En particulier, E est f.s.c. [**12**].

(3) Si $A \subseteq E$ n'est pas ω-compact, alors A contient une suite (x_n) équivalente à la base canonique de l^1, et telle que $X = \overline{\operatorname{Span}(x_n)}$ soit complementé dans E [**9**].

Nous allons voir que certains des espaces considérés ci-dessus ont la propriété (X). Il semble cependant que pour démontrer cela, on ne puisse pas se passer d'employer des techniques d'ensembles—pics, ce qui introduit une différence avec les démonstrations ci-dessus du caractère f.s.c. des espaces considérés.

On note $\tilde{\lambda}$ la mesure sur le spectre Δ de $L^\infty(\lambda)$ qui correspond canoniquement à λ. On note $\mathscr{LS}(E)$ l'ensemble des éléments de E^{**} qui sont limite dans (E^{**}, ω^*) d'une suite f.i.c. d'éléments de E. Le lemme suivant est à rapprocher de [**28**, Proposition 6.3].

LEMME 29. *On considère un sous-espace fermé X d'un espace $L^1(\lambda)$. Soit Δ le spectre de $L^\infty(\lambda)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *X est réflexif.*

(2) *Pour tout K fermé $\mathscr{G}_\delta$ de Δ tel que $\tilde{\lambda}(K) = 0$, on a $\chi_K \in \mathscr{LS}(X^\perp)$.*

DEMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $E = X^\perp \subset L^\infty(\lambda)$. D'après la reflexivité de X, on a $E^\perp = X^{\perp\perp} = X \subset L^1(\tilde{\lambda})$. Soit K un fermé de Δ tel que $\tilde{\lambda}(K) = 0$, le théorème de Bishop-Rudin-Carleson [**28**, p. 19] montre que $\chi_K \in E^{\perp\perp}$; si d'autre part K est un $\mathcal{G}_\delta$, on a $\chi_K \in \mathcal{LS}(L^\infty)$; on en déduit [**22**, II p. 32] que $\chi_K \in \mathcal{LS}(E)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit $\mu \in E^\perp$; il faut montrer que $\mu \ll \tilde{\lambda}$. Soit K un fermé $\mathcal{G}_\delta$ de Δ tel que $\tilde{\lambda}(K) = 0$. Il existe d'après l'hypothèse une suite (f_n) dans E uniformément bornée, telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_K$ pour la convergence simple sur Δ. D'après le théorème de Lebesgue, on a $\mu(K) = \lim_{n\to+\infty} \mu(f_n)$, et donc $\mu(K) = 0$ puisque $\mu \in E^\perp$; la régularité de μ termine la démonstration. C.Q.F.D.

Déduisons de ce lemme un premier résultat, qui répond à une question de G. Pisier (communication personnelle).

THEOREME 30. *Soit $\mathcal{R}$ un sous-espace réflexif d'un espace $L^1(\lambda)$. Alors l'espace $L^1(\lambda)/\mathcal{R}$ a la propriété (X): en particulier, $L^1(\lambda)/\mathcal{R}$ est unique prédual de son dual pour toute norme équivalente.*

DEMONSTRATION. Notons $Y = \mathcal{R}^\perp \subseteq L^\infty(\lambda)$. Soit $f \in Y^*$; on étend par Hahn-Banach la forme linéaire f en une mesure de Radon μ sur le spectre Δ de $L^\infty(\lambda)$; écrivons $\mu = \mu_r + \mu_s$, où $\mu_r \ll \tilde{\lambda}$ et $\mu_s \perp \tilde{\lambda}$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} f(g_n) = 0$ pour toute suite (g_n) dans Y, f.i.c., telle que $\lim_{\omega^*} g_n = 0$. Soit alors K un fermé $\mathcal{G}_\delta$ de Δ tel que $\tilde{\lambda}(K) = 0$. D'après le Lemme 29, il existe (g_n) f.i.c. dans Y tel que $\chi_K = \lim_{n\to+\infty} g_n$ pour la convergence simple sur Δ. Puisque $\tilde{\lambda}(K) = 0$, on a $\lim_{\omega^*} g_n = 0$, donc par hypothèse $\lim_{n\to\infty} \mu(g_n) = \mu(K) = 0$, et donc $\mu_s(K) = \mu(K) - \mu_r(K) = 0$. La régularité de μ_s sur Δ montre alors que $\mu_s = 0$, donc que $\mu \ll \tilde{\lambda}$, c'est-à-dire $f \in E/\mathcal{R}$, ce qui établit la propriété (X). C.Q.F.D.

COROLLAIRE 31. *Soit E un espace finiment représentable dans $l^1(\mathbf{N})$, et $\mathcal{R}$ un sous-espace que E qui ne contient pas l_n^1 uniformément. Alors l'espace $E/\mathcal{R}$ a la propriété (X), et est donc unique prédual pour toute norme équivalente.*

DEMONSTRATION. E est isométrique à un sous-espace d'une ultra-puissance $(l^1(\mathbf{N}))_{\mathcal{U}} = L^1(\mu)$. D'autre part, $\mathcal{R}$ ne contient pas l_n^1 et est f.s.c., il est donc reflexif. Comme on a $\mathcal{R} \subseteq E \subseteq L^1(\mu)$, l'espace $E/\mathcal{R}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^1(\mu)/\mathcal{R}$; le Théorème 30 termine la démonstration, puisque la propriété (X) est héréditaire. C.Q.F.D.

REMARQUES. (1) Il est vraisemblable que le résultat ci-dessus s'étend aux quotients d'espaces à structure locale inconditionnelle ne contenant pas l_n^∞ par un sous-espace ne contenant pas l_n^1. On ne sait pas si un espace qui ne contient pas l_n^∞ uniformément est toujours unique prédual (voir [**12**, §5]).

(2) Les espaces $L^1/\mathcal{R}$ sont de cotype 2 [**30**]; cependant ils ne sont pas toujours finiment représentables dans l^1 [**11**]; le Corollaire 31 fournit de nouveaux exemples d'espaces qui ont la propriété "super-unique prédual" (voir [**15**]) sans être B-convexes ni finiment représentables dans un espace à structure locale inconditionnelle de cotype fini.

Soit $0 < p < +\infty$, rappelons qu'un sous-ensemble E de $\Gamma = \hat{G}$ (avec les notations du §II) est dit un ensemble $\Lambda(p)$ s'il existe $s < p$ tel que les normes $\|\ \|_s$ et $\|\ \|_p$

coïncident sur l'espace vectoriel engendré par $\{\gamma | \gamma \in E\}$; tout ensemble de Sidon (voir [**32**, p. 120]) est un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p. Le résultat suivant est à rapprocher du Corollaire 15.

COROLLAIRE 32. *Soit E un sous-ensemble $\Lambda(p)$ de Γ, pour un certain $p \geqslant 1$. Alors l'espace $\mathscr{C}_{\Gamma \setminus E}(G)^*$ a la propriété (X).*

DEMONSTRATION. Si E est un ensemble $\Lambda(1)$, alors E est un ensemble $\Lambda(1+\varepsilon)$, pour un certain $\varepsilon > 0$ (voir [**21**, p. 148]); on peut donc se ramener au cas où $p > 1$; sur l'espace vectoriel engendré par $\{\gamma | \gamma \in E\}$, on a alors équivalence de $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_s$, ce qui montre que l'espace $L^1_E(G)$ est un sous-espace reflexif de $L^1(G)$. Il est en particulier ω^*-fermé dans $\mathscr{M}(G)$, ce qui montre que $L^1_E(G) = \mathscr{M}_E(G) = \mathscr{C}_{\Gamma\setminus E}(G)^{\perp}$. On a donc

$$\mathscr{C}_{\Gamma\setminus E}(G)^* = L^1(G)/L^1_E(G) \oplus \mathscr{M}_s(G)$$

où $\mathscr{M}_s(G)$ désigne l'espace des mesures sur G étrangères à la mesure de Haar; la propriété (X) étant stable par produit [**12**], on en déduit par le Théorème 30 que $\mathscr{C}^*_{\Gamma\setminus E}(G)$ a la propriété (X). C.Q.F.D.

Soit A une algèbre uniforme sur un compact K; soit $\phi \in \operatorname{Spec}(A)$. On dit que ϕ admet une mesure représentative unique s'il existe une unique probabilité μ sur K telle que $\phi(f) = \int_K f\,d\mu$ pour toute $f \in A$. On a alors (voir [**6**, Chapter 4])

$$\begin{aligned} H^1_0(\mu) &= \overline{\left\{ f \in A \,\middle|\, \int f\,d\mu = 0 \right\}} \quad \text{dans } L^1(K,\mu) \\ &= A^{\perp} \cap L^1(K,\mu). \end{aligned}$$

Si $\{\operatorname{Log}|f| \,|\, f \in A^{-1}\}$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$, on dit que l'algèbre A est Log-modulaire; tout $\phi \in \operatorname{Spec}(A)$ admet alors une unique mesure représentative. La démonstration du résultat suivant est une adaptation de [**1**].

THEOREME 33. *Soit A une algèbre uniforme sur K, et μ une mesure représentative unique. Alors l'espace $L^1(\mu)/H^1_0(\mu)$ a la propriété (X).*

DEMONSTRATION. Rappelons que sous ces hypothèses, on a [**6**, Chapter 4]

$$H^\infty(\mu) = H^1_0(\mu)^{\perp} = \bar{A} \quad \text{dans } (L^\infty(\mu), \omega^*).$$

On considère alors un fermé $\mathscr{G}_\delta$ F du spectre Δ de $L^\infty(\mu)$, tel que $\hat{\mu}(F) = 0$. Il existe des sous-ensembles mesurables (A_n) dans K tels que $\mu(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ et $F = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \tilde{A}_n$. On peut supposer que $\mu(A_n) \leqslant n^{-4}$ pour tout n. On considère alors la fonction

$$w = \sum_{n=1}^{+\infty} -n \cdot \chi_{A_n \setminus A_{n+1}}.$$

Il est clair que $w \in L^2_{\mathbf{R}}(K,\mu)$. Or l'hypothèse faite montre [**6**, p. 225] qu'on a $L^2(\mu) = H^2(\mu) \oplus \overline{H}{}^2_0(\mu)$, la somme étant orthogonale; il est facile d'en dédure que $\forall f \in L^2_{\mathbf{R}}(\mu)$, $\exists g \in H^2(\mu)$ t.q. $\operatorname{Re}(g) = f$ et $\|g\|_2 \leqslant \sqrt{2}\,\|f\|_2$. Soit donc $\tilde{w} \in H^2(\mu)$ tel que $w = \operatorname{Re}(\tilde{w})$ et posons $f = \exp(1/\tilde{w})$. On a $\operatorname{Re}(\tilde{w}) \leqslant -1$ d'où $\|f\|_\infty \leqslant 1$; f est donc une fonction de $H^\infty(\mu)$. De plus, pour $t \in \hat{A}_n$, on a

$$|f(t) - 1| = |\exp(1/\tilde{w}) - 1| \leqslant |\exp(1/|\tilde{w}|) - 1| \leqslant e^{1/n} - 1$$

et donc

$$f^{-1}(1) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ t \in \Delta \,|\, |f(t) - 1| \leqslant e^{1/n} - 1 \right\} \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n = F.$$

En remplaçant éventuellement f par $\frac{1}{2}(1 + f)$, on en déduit que tout fermé $\mathscr{G}_\delta$ F de Δ tel que $\hat{\mu}(F) = 0$ est contenu dans un ensemble-pic G pour $H^\infty(\mu)$ tel que $\hat{\mu}(G) = 0$.

Soit P un ensemble-pic pour $H^\infty(\mu)$, et considérons $\chi_p \in L^\infty(\mu)^{**}$. L'ensemble P est un fermé $\mathscr{G}_\delta$, donc on a $\chi_P \in \mathscr{L}\mathscr{S}(L^\infty)$. Soit $\varphi \in H^\infty$ de norme 1 telle que $P = \{t \in \Delta \,|\, |\varphi(t)| = 1\} = \{t \in \Delta \,|\, \varphi(t) = 1\}$; il est clair que $\chi_P = \lim_{n\to+\infty} \varphi^n$ dans $(L^{\infty**}, \omega^*)$; or on a [**22**, II, p. 32] $\mathscr{L}\mathscr{S}(L^\infty) \cap H^{\infty**} = \mathscr{L}\mathscr{S}(H^\infty)$ et donc $\chi_P \in \mathscr{L}\mathscr{S}(H^\infty)$, il existe donc une suite f.i.c. (f_n) dans $H^\infty(\mu)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n = \chi_p$.

Montrons à présent que $L^1/H_0^1(\mu)$ a la propriété (X). Soit $\nu \in H^{\infty*}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \nu(f_n) = 0 \quad \forall (f_n) \text{ f.i.c. dans } H^\infty(\mu), \text{ t.q. } \lim_{\omega^*} f_n = 0.$$

Ecrivons $\nu = \nu_r + \nu_s$, où $\nu_r \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$. Il faut montrer que $\nu_s = 0$. Soit F un fermé $\mathscr{G}_\delta$ de Δ tel que $\hat{\mu}(F) = 0$ et qui porte ν_s. Soit G un H^∞-ensemble pic contenant F, tel que $\hat{\mu}(G) = 0$. Soit (g_n) f.i.c. dans $H^\infty(\mu)$ telle que $\chi_p = \lim_{n\to\infty} g_n$ dans $(L^{\infty**}, \omega^*)$. Pour tout $h \in H^\infty$, on a

$$\begin{aligned} \int_\Delta h \, d\nu_s &= \int_\Delta h \cdot \chi_F d\nu_s = \int_\Delta h \cdot \chi_F d\nu \\ &= \int_\Delta \lim_{n\to\infty} (hg_n) \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta h \cdot g_n \, d\nu = 0 \end{aligned}$$

puisque $(h \cdot g_n)$ est f.i.c. et $\lim_{\omega^*} h \cdot g_n = 0$. On en déduite que $\nu_s = 0$, i.e. $\nu \ll \mu$. C.Q.F.D.

On en déduit le résultat ce-dessous, qui est une amélioration du Théorème 9.

COROLLAIRE 34. *Soit A un algèbre uniforme vérifiant les hypothèses du Théorème* 9. *Alors l'espace A^* a la propriété* (X).

DEMONSTRATION. En effet, sous ces hypothèses, on a $A^* = \oplus_{\mu\in M} L^1(\mu)/H_0^1(\mu) \oplus_1 \mathscr{M}_s(K)$, où M est une famille maximale de mesures représentatives étrangères 2 à 2 [**6**, p. 217]. D'après le Théorème 33, chaque espace $L^1(\mu)/H_0^1(\mu)$ $(\mu \in M)$ a la propriété (X); il suffit alors d'employer le fait que la propriété (X) est stable par l^1-somme directe. C.Q.F.D.

REMARQUES. (1) Dans [**2**], T. Ando pose la question de l'extension des propriétés des preduaux d'algèbres de von Neumann aux sous-algèbres ω^*-fermées *non-auto-adjointes* de l'algèbre $\mathscr{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un Hilbert H. Le Lemme 10 et le Théorème 33 donnent l'extension cherchée pour les propriétés: "f.s.c., L-facteur dans son bidual, unique prédual", pour les algèbres $H^\infty(\mu)$, où μ est une mesure représentative unique (T. Ando avait montré cela dans [**2**], dans le cas particulier de $H^\infty(D)$). Il est clair cependant qu'il n'y a aucun espoir d'obtenir des résultats généraux: en effet ([**25**] et F. Delbaen, communication personnelle), pour tout espace de Banach X, l'algèbre uniforme A_X engendrée par X et les constantes dans $\mathscr{C}((X_1^*, \omega^*))$ contient X comme facteur direct, une projection étant donnée par

$$\forall f \in A_X, \quad p(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(e^{i\theta}x) \, d\theta.$$

En particulier, si on prend $X = l^1(\mathbf{N})$, on aura $l^\infty(\mathbf{N}) \subseteq A_X^*$. L'algèbre A_X^{**} sera donc une sous-algèbre ω^*-fermée de $\mathscr{L}(H)$ dont un prédual contiendra $l^\infty(\mathbf{N})$. En particulier, il n'y a aucune chance pour que toute sous- algèbre ω^*-fermée de $\mathscr{L}(H)$ admette un unique prédual.

(2) La démonstration du Théorème 33 s'adapte immédiatement pour montrer le résultat suivant: soit μ une mesure représentative unique, soit X un $H^\infty(\mu)$-module ω^*-fermé tel que $H^\infty(\mu) \subseteq X \subseteq L^\infty(\mu)$. Alors l'espace $L^1(\mu)/X_\perp$ est l'unique prédual de X pour toute norme équivalente.

Questions. De nombreuses questions naturelles se posent dans l'esprit de ce travail. Choisissons-en deux:

(1) Soit G un groupe compact abelien. Peut-on caractériser les parties E de $\Gamma = \hat{G}$ telles que $\mathscr{C}_E(G)^*$ soit f.s.c.?

(2) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. L'espace $L^1/H^1\ (\mathbf{T}^n)$ a-t-il la propriété (X)? Est-il unique prédual de son dual?

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Amar, *Sur un théorème de Mooney relatif aux fonctions analytiques bornées*, Pacific J. Math. **16** (1973), 191–199.

2. T. Ando, *On the predual of H^∞*, Comment. Math. Special Issue **1** (1978), 33–40.

3. S. Axler, I. D. Berg, N. Jewell and A. Shields, *Approximation by compact operators and the space $H^\infty + C$*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), 601–612.

4. E. Behrends, *M-structure and the Banach-Stone theorem*, Lecture Notes in Math., vol. 736, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.

5. J. Bourgain, *On weak completeness of the dual of spaces of analytic and smooth functions*, Preprint, 1982.

6. A. Browder, *Introduction to function algebras*, Benjamin, New York, 1969.

7. A. V. Buchvalov and G. Lovanovski, *On sets closed in measure*, Trans. Moscow Math. Soc. **2** (1978), 127–148; *En Russe*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **34** (1977).

8. F. Delbaen, *The Pełczynski property for some uniform algebras*, Studia Math. **64** (1979), 117–125.

9. G. A. Edgar, *An ordering for Banach spaces*, Pacific J. Math. **108** (1983), 83–98.

10. H. Fakhoury, *Existence d'une projection continue de meilleure approximation dans certains espaces de Banach*, J. Math. Pures Appl. **53** (1974).

11. T. Figiel, S. Kwapien and A. Pełczynski, *Sharp estimates for the constants of local unconditional structure of Minkowski spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. **25** (1977), 1221–1226.

12. G. Godefroy and M. Talagrand, *Nouvelles classes d'espaces de Banach à prédual unique*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Ecole Polytechnique, Exposé 6 (27/3/1981).

13. G. Godefroy, *Points de Namioka, espaces normants, applications à la théorie isométrique de la dualité*, Israel J. Math. **38** (1981), 209–220.

14. ______, *Parties admissibles d'un espace de Banach*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) **16** (1983), 109–122.

15. ______, *Propriétés de la classe de espaces de Banach qui sont l'unique prédual de leur dual*, Quart J. Math. Oxford Ser. (2) **35** (1984), 147–152.

16. ______, *Projections becontractantes du bidual E'' d'un espace E sur l'espace E*, Dans Thèse d'Etat, Paris VI, 1981.

17. P. Harmand and A. Lima, *Banach spaces which are M-idéals in their bidual*, Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).

18. H. Helson and D. Lowdenslager, *Prediction theory and Fourier series in several variables*, Acta Math. **99** (1958), 165–202.

19. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

20. J. Lindenstrauss, *Extensions of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 48 (1964).

21. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 338, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973.

22. ______, *Classical Banach spaces*, Vol. I. *Sequence spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 92, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

23. D. Luecking, *Compact Hankel operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 222–224.

24. M. C. Mooney, *A theorem on bounded analytic functions*, Pacific J. Math. **18** (1967), 827–831.

25. H. Milne, *Banach space properties of uniform algebras*, Bull. London Math. Soc. **4** (1972), 323–326.

26. Newman, *Pseudo-uniform convexity in H^1*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 676–679.

27. N. Øverlid, *Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar{\partial}$-equations*, Math. Scand. **29** (1971), 137–160.

28. A. Pełczynski, *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators*, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math., no. 30, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1978.

29. J. H. Shapiro, *Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters*; $0 \leqslant p < 1$, Israel J. Math. **29** (1978).

30. G. Pisier, *Une nouvelle classe d'espaces de Banach vérifiant le théorème de Grothendieck*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), 69–80.

31. R. Pol, *On a question of H. H. Corsen and some related problems*, Fund. Math.

32. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Tracts in Math., no. 12, Interscience, New York, 1967.

33. ______, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.

34. ______, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.

35. P. Wojtaszczyk, *On weakly compact operators for some uniform algebras*, Studia Math. **64** (1979), 105–116.

36. L. D. Hoffman, *Pseudo-uniform convexity of H^1 in several variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970).

37. G. Godefroy, *Espaces L^1/H^1 sur des domaines généraux*, Séminaire d'Analyse Harmonique de l'Université d'Orsay, 1982/1983.

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITE PARIS VI, 75230 - PARIS CEDEX 05, FRANCE