TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 289, Number 1, May 1985

POINTS FIXES D'APPLICATIONS HOLOMORPHES DANS UN DOMAINE BORNÉ CONVEXE DE $\mathbf{C}^n$

BY

JEAN-PIERRE VIGUÉ[1]

ABSTRACT. Let D be a bounded convex domain in $\mathbf{C}^n$. We prove that the set V of fixed points of a holomorphic map $f\colon D \to D$ is a complex submanifold of D and, if V is not empty, V is a holomorphic retract of D.

1. Introduction. L'étude de l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe f d'un domaine borné D dans lui-même a déjà fait l'objet d'un certain nombre de recherches. Ainsi, M. Hervé [**3, 4**], A. Renaud [**8**] et E. Vesentini [**10, 11**] ont montré pour certains espaces de Banach complexes E le résultat suivant: soit B la boule-unité ouverte de E, et soit $f\colon B \to B$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors l'ensemble des points fixes de f est l'intersection de B avec un sous-espace vectoriel complexe fermé de E. Bien sûr, un tel résultat n'est pas vrai pour n'importe quel espace de Banach complexe; cependant, dans [**12**], j'ai montré, avec quelques hypothèses supplémentaires, que, si D est un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et si $f\colon D \to D$ est une application holomorphe ayant deux points fixes distincts x et y, il existe une géodésique complexe passant par x et y et formée de points fixes de f. Ainsi, l'ensemble des points fixes de f est connexe.

Des résultats récents de L. Lempert [**6, 7**] et de H. Royden et P. Wong [**9**] sur l'égalité des distances de Carathéodory et de Kobayashi sur un domaine borné convexe D de $\mathbf{C}^n$ entraînent l'existence de nombreuses géodésiques complexes dans D. Ceci va me permettre de montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et soit $f\colon D \to D$ une application holomorphe. Alors l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété analytique connexe de D.*

Réciproquement, étant donnée une sous-variété analytique V de D, je donnerai une condition nécessaire et suffisante pour que V soit l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f\colon D \to D$. Plus précisément, je montrerai le théorème suivant:

THÉORÈME 1.2. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et soit V une sous-variété analytique de D. Pour qu'il existe une application holomorphe $f\colon D \to D$ telle que V*

Received by the editors July 12, 1984.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 32H15; Secondary 58C30.
Key words and phrases. Points fixes d'une application holomorphe, distances invariantes.

[1]Membre du L. A. 213 du CNRS.

0002-9947/85 $1.00 + $.25 per page

soit l'ensemble des points fixes de f, il faut et il suffit que V soit rétracte holomorphe de D (i.e., qu'il existe une application holomorphe ψ: $D \to V$ telle que $\psi|_V = \mathrm{id}|_V$).

La démonstration de ce résultat repose sur l'étude des géodésiques complexes d'un domaine borné D, et sur le fait que les domaines bornés convexes ont beaucoup de géodésiques complexes.

Je terminerai cet article en donnant quelques applications de ces résultats et en traitant des exemples. Commençons par quelques rappels sur les géodésiques complexes et les géodésiques complexes invariantes par une application holomorphe f.

(Je remercie M. Michel Hervé qui m'a posé les questions qui ont inspiré cet article. M. Nessim Sibony m'a signalé l'existence de géodésiques complexes sur un domaine borné convexe et je l'en remercie. Enfin, M. Henri Cartan s'est intéressé à ce travail, et je suis heureux de lui dédier cet article à l'occasion de son quatre-vingtième anniversaire.)

2. Rappel sur les géodésiques complexes. La distance noneuclidienne sur le disque-unité $\Delta \subset \mathbf{C}$ est définie par la formule

$$\omega(x, y) = th^{-1}\left(\left|\frac{x-y}{1-\bar{y}x}\right|\right).$$

Si D est un domaine borné de $\mathbf{C}^n$, on définit alors la distance de Carathéodory sur D de la manière suivante: pour tout $x \in D$, pour tout $y \in D$.

$$c_D(x, y) = \sup_{f \in H(D, \Delta)} \omega(f(x), f(y))$$

($H(D, \Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans le disque-unité Δ). On a bien sûr: $c_\Delta = \omega$.

La métrique infinitésimale de Carathéodory γ_D est définie par la formule: pour tout $x \in D$, pour tout $v \in \mathbf{C}^n$,

$$\gamma_D(x, v) = \sup_{f \in H(D, \Delta)} |f'(x) \cdot v|.$$

On dit que c_D (resp. γ_D) est une distance (resp. métrique) invariante, ce qui signifie que toute application holomorphe f: $D \to D'$ est contractante pour cette distance (resp. métrique). Ceci justifie la notion de géodésique complexe introduite par Vesentini [**10, 11**].

DÉFINITION 2.1. On dit qu'une application holomorphe φ: $\Delta \to D$ du disque-unité $\Delta \subset \mathbf{C}$ dans D est une géodésique complexe de D si φ est une isométrie pour c_Δ et c_D, c'est-à-dire, si, pour tout $\zeta_1 \in \Delta$, pour tout $\zeta_2 \in \Delta$, on a

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2).$$

E. Vesentini [**10**, pp. 384–385], donne la caractérisation suivante des géodésiques complexes de D.

PROPOSITION 2.2. *Soit φ: $\Delta \to D$ une application holomorphe. Pour que φ soit une géodésique complexe de D, il faut et il suffit que φ satisfasse à une des conditions suivantes*:

(i) *il existe deux points distincts ζ_1 et ζ_2 de Δ tels que*

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2);$$

(ii) *il existe* $\zeta_1 \in \Delta$ *et un vecteur* $v \in \mathbf{C}$ *non nul tel que*

$$\gamma_D\big(\varphi(\zeta_1), \varphi'(\zeta_1) \cdot v\big) = \gamma_\Delta(\zeta_1, v).$$

3. Distances invariantes et existence de géodésiques complexes. Soit D un domaine borné de $\mathbf{C}^n$. Etant donnés deux points x et y de D, on définit [**6, 5**] $\delta_D(x, y)$ comme la borne inférieure de la distance noneuclidienne $\omega(a, b)$ de deux points a et b du disque-unité Δ tels qu'il existe une application holomorphe f: $\Delta \to D$ telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. (Eventuellement, $\delta_D(x, y)$ peut être infini.) On définit alors [**5**] la distance de Kobayashi $k_D(x, y)$ comme la borne inférieure de la somme

$$\delta_D(x_1, x_2) + \delta_D(x_2, x_3) + \cdots + \delta_D(x_{n-1}, x_n)$$

pour toute chaîne finie $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_1 = x$ et $x_n = y$. On définit aussi [**1, 5**] la métrique infinitésimale de Kobayashi χ_D: pour tout $x \in D$, pour tout $v \in \mathbf{C}^n$, $\chi_D(x, v)$ est la borne inférieure du module des nombres complexes $\lambda \in \mathbf{C}$, tels qu'il existe une application holomorphe φ: $\Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = x$ et que $\varphi'(0) \cdot \lambda = v$.

On vérifie que k_D (resp. χ_D) est une distance (resp. métrique) invariante, et on a toujours

$$c_D \leqslant k_D \leqslant \delta_D, \qquad \gamma_D \leqslant \chi_D.$$

Lempert [**6, 7**] et Royden et Wong [**9**] montrent le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. *Soit D un domaine borné convexe de* $\mathbf{C}^n$. *Alors*, $c_D = k_D = \delta_D$. *De même, pour les métriques infinitésimales*, $\gamma_D = \chi_D$.

Comme me l'a fait remarquer N. Sibony, on déduit du Théorème 3.1 le résultat suivant:

THÉORÈME 3.2. *Soit D un domaine borné convexe de* $\mathbf{C}^n$:

(i) *Etant donnés deux points x et y de D, il existe au moins une géodésique complexe* φ: $\Delta \to D$ *telle que* x *et* $y \in \varphi(\Delta)$.

(ii) *Etant donnés* $x \in D$ *et* $v \in T_x(D)$, *il existe au moins une géodésique complexe* φ: $\Delta \to D$ *telle que* $\varphi(0) = x$ *et que* $\varphi'(0)$ *soit colinéaire à* v.

DÉMONSTRATION. Montrons (i). D'après L. Harris [**1**, Proposition 2.3, p. 381], D, qui est convexe, est fortement complet pour la distance de Carathéodory c_D, c'est-à-dire que les boules pour c_D sont relativement compactes dans D. Ceci prouve que D est taut au sens de S. Kobayashi [**5**]. (Ceci signifie que, si on considère une suite $f_n \in H(\Delta, D)$ de fonctions holomorphes convergeant, uniformément sur tout compact de Δ, vers une fonction $f \in H(\Delta, \mathbf{C}^n)$, ou bien, f est une fonction holomorphe à valeurs dans D, ou bien, $f(\Delta)$ est contenu dans la frontière de D.)

Soient x et y deux points de D. On peut trouver une suite φ_n de fonctions holomorphes de Δ dans D telles que $\varphi_n(0) = x$, $\varphi_n(\zeta_n) = y$ et que

$$\delta_D(x, y) = \lim \omega(0, \zeta_n).$$

Comme D est borné, d'après le théorème de Montel, on peut extraire de la suite φ_n une sous-suite convergente vers une fonction holomorphe φ: $\Delta \to \mathbf{C}^n$. Comme D est taut, φ est une application holomorphe de Δ dans D, et il existe $\zeta \in \Delta$ tel que

$\varphi(0) = x$, $\varphi(\zeta) = y$, et $\delta_D(x, y) = \omega(0, \zeta) = c_\Delta(0, \zeta)$; or, $\delta_D(x, y) = c_D(x, y)$. Ainsi, φ est une géodésique complexe au sens de E. Vesentini. La démonstration de (ii) est laissée au lecteur.

4. Géodésiques complexes invariantes. Compte-tenu du Théorème 3.2, le théorème fondamental de [**12**] peut se reformuler de la façon suivante:

THÉORÈME 4.1. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$. Soit f: $D \to D$ une application holomorphe, et soient x et y deux points fixes distincts de f. Alors il existe une géodésique complexe φ: $\Delta \to D$ passant par x et y et telle que son image $\varphi(\Delta)$ soit formée de points fixes de f.*

Par une méthode de démonstration analogue à celle de [**12**], je montre le théorème suivant:

THÉORÈME 4.2. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et soit f: $D \to D$ une application holomorphe. Supposons qu'il existe $x \in D$ et un vecteur $v \in \mathbf{C}^n$ non nul tels que $f(x) = x$ et $f'(x) \cdot v = v$. Alors il existe une géodésique complexe φ: $\Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = x$, que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v, et que son image $\varphi(\Delta)$ soit contenue dans l'ensemble des points fixes de f.*

DÉMONSTRATION. Quitte à multiplier v par un scalaire, on peut supposer que $\gamma_D(x, v) = 1$. Considérons l'ensemble N des applications holomorphes φ: $\Delta \to D$ telles que $\varphi(0) = x$, $\varphi'(0) = v$. Il est clair que N est non vide et que tout élément de N est une géodésique complexe. Considérons sur l'espace vectoriel $H(\Delta, \mathbf{C}^n)$ la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Δ, et sur N, la topologie induite. Du fait que D est taut, et du théorème de Montel, on déduit que N est compact. Il est clair, d'autre part, que N est convexe.

Soit $\varphi \in N$. Alors $f \circ \varphi$ est une application holomorphe telle que $f \circ \varphi(0) = 0$ et $(f \circ \varphi)'(0) = v$. Ainsi, $f \circ \varphi \in N$.

Soient maintenant $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, p points de Δ. Les $(\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_p))$, pour tous les $\varphi \in N$, forment un ensemble convexe compact K de $(\mathbf{C}^n)^p$. Comme, pour tout $\varphi \in N$, $f \circ \varphi \in N$, on en déduit que f définit une application continue f_p de K dans K

$$K \overset{f_p}{\to} K, \qquad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big).$$

On sait que le convexe compact K est homéomorphe à la boule-unité fermée E_s de $\mathbf{R}^s$, pour un certain entier $s \in \mathbf{N}$. D'après le théorème de Brouwer, f_p admet un point fixe dans K. Il existe donc une géodésique complexe $\varphi \in N$ telle que

$$f\big(\varphi(\alpha_i)\big) = \varphi(\alpha_i), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, p.$$

Pour montrer qu'il existe $\varphi \in N$, tel que $f(\varphi(\zeta)) = \varphi(\zeta)$, pour tout $\zeta \in \Delta$, il suffit de montrer que l'ensemble

$$\bigcap_{\zeta \in \Delta} \{\varphi \in N | f(\varphi(\zeta)) = \varphi(\zeta)\}$$

est non vide. C'est une intersection de fermés, et nous venons de montrer que toute intersection finie est non vide. Comme N est compact, l'intersection est non vide, et le théorème est démontré.

On en déduit le théorème suivant:

THÉORÈME 4.3. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$. Soit f: $D \to D$ une application holomorphe. Alors l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété analytique complexe connexe de D.*

DÉMONSTRATION. On sait déjà que l'ensemble V des points fixes de f est un sous-ensemble analytique complexe connexe D. Soit $x_0 \in V$. Il est clair que, pour tout vecteur v non nul appartenant à l'espace tangent de Zariski $T_{x_0}(V)$ de V au point x_0, on a $f'(x_0) \cdot v = v$. D'après le Théorème 4.2, on peut donc trouver une géodésique complexe φ: $\Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = x_0$, que $\varphi'(x_0)$ soit colinéaire à v et que $\varphi(\Delta)$ soit contenu dans V. Ainsi, le cône tangent $C_3(V, x_0)$ défini par Whitney [**14**] est égal à l'espace tangent de Zariski $T_{x_0}(V)$. Comme $C_3(V, x_0)$ a pour dimension la dimension de V au point x_0, ceci suffit à montrer que $\dim T_{x_0}(V) = \dim_{x_0} V$, et que x_0 est un point régulier de V. Ainsi, V est une sous-variété analytique de D, et le théorème est démontré.

Des Théorèmes 4.2 et 4.3, on déduit facilement la caractérisation suivante de l'espace tangent $T_{x_0}(V)$ à la variété V des points fixes de f.

PROPOSITION 4.4. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, soit f: $D \to D$ une application holomorphe, soit V la variété analytique des points fixes de f, et soit x_0 un point de V. Un vecteur v appartinent à $T_{x_0}(V)$ si et seulement si on a $f'(x_0) \cdot v = v$.*

5. Trois lemmes sur les applications linéaires. Pour continuer ce travail, j'ai besoin d'un certain nombre de lemmes sur les applications linéaires.

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie, munie d'une norme $\|\cdot\|$. Soit f: $E \to E$ une application linéaire de norme $\leqslant 1$, pour la norme donnée. Il est clair que toute valeur spectrale de f est de module $\leqslant 1$. D'après les théorèmes classiques d'algèbre linéaire, E admet une décomposition directe $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, où E_1 est le sous-espace spectral correspondant à la valeur spectrale 1 de f, E_2 est la somme des sous-espaces spectraux correspondant aux valeurs spectrales de f de module 1, différentes de 1, et E_3 est la somme des sous-espaces spectraux correspondants aux valeurs spectrales de module < 1. On peut alors énoncer et montrer le premier lemme.

LEMME 5.1. $f|_{E_1} = \mathrm{id}$.

DÉMONSTRATION. On sait déjà qu'il existe une base de E_1 telle que, dans cette base, $f|_{E_1}$ admette une réduite de Jordan T, avec des 1 sur la diagonale. Comme f est de norme 1, il existe une constante M qui majore tous les coefficients de T^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que T est diagonale.

Si on considère maintenant une autre valeur spectrale α de module 1, on peut considérer f/α et utiliser le Lemme 5.1 ci-dessus. On montre ainsi le lemme suivant:

LEMME 5.2. *Il existe une base de E_2 dans laquelle $f|_{E_2}$ est diagonale.*

Enfin, nous avons le lemme suivant (dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur !).

LEMME 5.3. *Soit l'application linéaire* $h_p = (\mathrm{id} + f + f^2 + \cdots + f^{p-1})/p$. *Alors* $h_p|_{E_2 \oplus E_3}$ *converge vers* 0 *quand* $p \to +\infty$ (*bien sûr*, $h_p|_{E_1} = \mathrm{id}$).

6. Points fixes d'applications holomorphes. Je peux alors montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 6.1. *Soit* D *un domaine borné convexe de* $\mathbf{C}^n$, *et soit* V *une sous-variété analytique connexe non vide de* D. *Pour qu'il existe une application holomorphe* f: $D \to D$ *telle que* V *soit l'ensemble des points fixes de* f, *il faut et il suffit que* V *soit rétracte holomorphe de* D (*i.e., qu'il existe une application holomorphe* ψ: $D \to V$ *telle que* $\psi|_V = \mathrm{id}\,|_V$).

DÉMONSTRATION. Il est clair que, si ψ: $D \to V$ est une rétraction sur V, alors V est égal à l'ensemble des points fixes de ψ. Réciproquement, soit f: $D \to D$ une application holomorphe, et soit V l'ensemble de ses points fixes. Soit

$$\varphi_p = \frac{1}{p}\left(\mathrm{id} + f + \cdots + f^{p-1}\right).$$

Comme D est convexe, φ_p est une application holomorphe de D dans D. Comme D est borné, on peut, d'après le théorème de Montel, extraire de la suite φ_p une sous-suite φ_{p_k} qui converge uniformément sur tout compact de D vers une application holomorphe $\varphi \in H(D, \mathbf{C}^n)$. Comme D est taut (au sens de Kobayashi [**5**]), φ est une application holomorphe de D dans D telle que l'ensemble des points fixes de φ contienne V.

Soit $x_0 \in V$. L'application linéaire tangente $f'(x_0)$ est de norme $\leqslant 1$, pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(x_0, \cdot)$. On peut donc appliquer à $f'(x_0)$, $\varphi_p'(x_0)$ et $\varphi'(x_0)$ les résultats du §5. D'après le Lemme 5.3, et compte-tenu de la Proposition 4.4, on a

$$\varphi'(x_0) = \mathrm{id}\big|_{T_{x_0}(V)} \oplus \{0\}\big|_F,$$

où F est un supplémentaire de $T_{x_0}(V)$ dans $\mathbf{C}^n$. On déduit des inégalités de Cauchy qu'il existe un voisinage U de x_0 et une constante k, très proche de 0, telle que, pour tout $x \in U$, pour tout $v \in F$, on ait $\|\varphi'(x) \cdot v\| < k\|v\|$. On en déduit que, pour tout $x \in V \cap U$, pour tout $v \in F$, tel que le segment $[x, x + v]$ soit contenu dans U, on a $\|\varphi(x + v) - \varphi(x)\| < k\|v\|$.

Considérons maintenant la suite $\psi_p = \varphi^p$. On peut en extraire une sous-suite ψ_{p_k} qui converge (uniformément sur tout compact de D) vers une fonction holomorphe $\psi \in H(D, D)$. Il est clair que $\psi|_V = \mathrm{id}|_V$. On déduit des majorations que je viens d'écrire qu'il existe un voisinage W de x_0 dans D tel que $\psi(W) \subset V$. Comme D est une variété de Stein, V est défini dans D par des équations globales $(g_i)_{i=1,\ldots,q}$. On a, pour tout $x \in W$, $g_i(\psi(x)) = 0$. Le théorème de prolongement analytique montre que $g_i \circ \psi \equiv 0$ pour tout $i = 1, \ldots, q$. Ainsi, $\psi(D)$ est contenu dans V, et ψ est la rétraction holomorphe cherchée.

7. Applications et exemples. De l'existence de la rétraction holomorphe ψ, on déduit la

PROPOSITION 7.1. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et soit f: $D \to D$ une application holomorphe. Soit V l'ensemble des points fixes de f. Alors on a*

$$c_{D|V} = c_V, \qquad k_{D|V} = k_V.$$

De même, pour les métriques infinitésimales de Carathéodory et de Kobayashi, on a

$$\gamma_{D|V} = \gamma_V, \qquad \chi_{D|V} = \chi_V.$$

EXEMPLE 7.2. La Proposition 7.1 permet de montrer facilement que certaines sous-variétés d'un domaine borné convexe ne sont pas l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe. Ainsi, considérons dans $\Delta^3 \subset \mathbf{C}^3$ l'ensemble $V = \{(x, y, z) \in \Delta^3 | z = 4xy\}$. Alors V n'est pas l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe f: $\Delta^3 \to \Delta^3$. En effect, V est analytiquement isomorphe à

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1, |xy| < 1/4\}.$$

Il est facile de voir que, sur D, les métriques infinitésimales de Carathéodory et de Kobayashi ne coïncident pas, alors que sur Δ^3, on a $\gamma_{\Delta^3} = \chi_{\Delta^3}$. Compte-tenu de la Proposition 7.1, ceci prouve le résultat.

Si l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe est de dimension 1, on peut le préciser davantage. Ainsi, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 7.3. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et soit $V \subset D$ un sous-ensemble analytique de dimension pure* 1. *Pour que V soit l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe f: $D \to D$, il faut et il suffit qu'il existe une géodésique complexe φ: $\Delta \to D$ telle que $V = \varphi(\Delta)$.*

DÉMONSTRATION. Soit V une variété analytique de dimension 1 qui est l'ensemble des points fixes de f: $D \to D$. Considérons deux points distincts x et y de V. D'après le Théorème 4.1, il existe une géodésique complexe φ: $\Delta \to D$ passant par deux points et telle que $\varphi(\Delta) \subset V$. Il est facile de montrer que $\varphi(\Delta)$ est ouvert et fermé dans V, ce qui montre la partie directe de la proposition.

Réciproquement, soit φ: $\Delta \to D$ une géodésique complexe. Soient ζ_1 et ζ_2 deux points distincts de Δ. On peut trouver une fonction holomorphe f: $D \to \Delta$ telle que

$$c_\Delta(f(\varphi(\zeta_1)), f(\varphi(\zeta_2))) = c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2))$$

et comme φ est géodésique complexe, on a

$$c_\Delta(f(\varphi(\zeta_1)), f(\varphi(\zeta_2))) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2).$$

Quitte à composer f avec un automorphisme de Δ, on peut donc supposer que $f \circ \varphi(\zeta_1) = \zeta_1$, $f \circ \varphi(\zeta_2) = \zeta_2$. D'après le lemme de Schwarz, on a donc $f \circ \varphi(\zeta) = \zeta$ pour tout $\zeta \in \Delta$. On en déduit que l'application $\varphi \circ f$: $D \to D$ est telle que l'ensemble des points fixes de $\varphi \circ f$ est exactement $\varphi(\Delta)$.

En particulier, si D est un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^2$, on obtient le corollaire suivant (comparer avec Hervé [**3, 4**] et Vesentini [**11**]).

COROLLAIRE 7.4. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^2$. Alors l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f\colon D \to D$ est de l'une des formes suivantes*:

(i) *l'ensemble vide*;

(ii) *un point*;

(iii) *l'image d'une géodésique complexe de D*;

(iv) *D tout entier.*

EXEMPLE 7.5. Je vais maintenant étudier l'exemple suivant. Soit $\mathbf{C}^n$, muni d'une norme $\|\cdot\|$, et soit B la boule-unité ouverte de $\mathbf{C}^n$, pour cette norme. Soit $f\colon B \to B$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$, et soit V l'ensemble des points fixes de f. Alors il existe une rétraction holomorphe $\psi\colon B \to V$. La dérivée $\psi'(0)$ est un projecteur de norme $\leqslant 1$ pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_B(0, \cdot)$ qui est égale à la norme donnée. Soit

$$B_1 = \psi'(0) \cdot B = B \cap \psi'(0) \cdot \mathbf{C}^n.$$

Considérons les applications

$$B \xrightarrow{\psi'(0)} B_1 \xrightarrow{\psi|_{B_1}} V \xrightarrow{\psi'(0)|_V} B_1.$$

Il est clair que l'application $\varphi = \psi'(0)|_V \circ \psi|_{B_1}\colon B_1 \to B_1$ est telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \mathrm{id}$. Par suite, d'après le théorème d'unicité de H. Cartan (voir, par exemple, [**13**, Théorème 1.2.5, p. 130]), φ est la transformation identique. Alors $\psi|_{B_1}$ est une isométrie pour les distances de Carathéodory c_{B_1} et c_V de B_1 dans V. Comme B_1 est complet pour c_{B_1}, on déduit de [**2**] que $\psi|_{B_1}$ est un isomorphisme analytique de B_1 sur V.

On déduit de ces considérations la caractérisation suivante de l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe f de B dans B telle que $f(0) = 0$.

THÉORÈME 7.6. *Soit B la boule-unité ouverte de $\mathbf{C}^n$, pour une norme $\|\cdot\|$. Soit V une sous-variété analytique de B contenant l'origine. Pour que V soit l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f\colon B \to B$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée: il existe un projecteur p de norme 1 de $\mathbf{C}^n$ sur $T_0(V)$, et un isomorphisme analytique φ de $T_0(V) \cap B$ sur V tel que $\varphi(0) = 0$, tangent à l'identité à l'origine.*

D'autre part, Hervé [**4**], Renaud [**8**] et Vesentini [**10**, **11**] ont montré que, si la boule-unité ouverte B de $\mathbf{C}^n$, pour une norme $\|\cdot\|$, est telle que tous les points de la frontière de B sont des points complexes-extrêmaux de la boule fermée $\overline{B}$, alors l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f\colon B \to B$ telle que $f(0) = 0$ est l'intersection de B avec un sous-espace vectoriel complexe E de $\mathbf{C}^n$. Nous avons la caractérisation suivante de ces sous-espaces: soit E un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbf{C}^n$. Pour que $E \cap B$ soit l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f\colon B \to B$, il faut et il suffit qu'il existe un projecteur p de norme 1 de $\mathbf{C}^n$ sur E. (Cette condition est toujours satisfaite dans le cas de la norme hermitienne traité par Hervé [**4**] et Renaud [**8**], mais n'est pas vide dans le cas général; voir Vesentini [**10**, **11**].)

REMARQUE ET EXEMPLE 7.7. Comme l'a remarqué Vesentini [**11**], même pour un domaine d'holomorphie, il n'existe pas en général de géodésiques complexes. Aussi, il ne semble pas que l'on puisse remplacer la condition de convexité de D par une condition d'holomorphe convexité.

D'ailleurs, si R est un nombre réel > 1, et si $D_R = \{z \in \mathbf{C} \mid 1/R < |z| < R\}$, l'application holomorphe f définie par $f(z) = 1/z$ admet dans D deux points fixes isolés.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Harris, *Schwarz-Pick system of pseudometrics for domains in normed linear spaces*, Advances in Holomorphy, North-Holland Math. Studies, no. 34, Amsterdam, 1979, pp. 345–406.

2. L. Harris and J.-P. Vigué, *A metric condition for equivalence of domains*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **67** (1979), 402–403.

3. M. Hervé, *Quelques propriétés des transformations intérieures d'un domaine borné*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **68** (1951), 125–168.

4. ______, *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule à m dimensions dans elle-même*, J. Math. Pures Appl. (9) **42** (1963), p. 117–147.

5. S. Kobayashi, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357–416.

6. L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 427–474.

7. ______, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Anal. Math. **8** (1982), 257–261.

8. A. Renaud, *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule de dimension infinie dans une autre*, Bull. Sci. Math. (2) **97** (1973), 129–159.

9. H. Royden and P. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains* (à paraître).

10. E. Vesentini, *Complex geodesics*, Compositio Math. **44** (1981), 375–394.

11. ______, *Complex geodesics and holomorphic maps*, Sympos. Math. **26** (1982), 211–230.

12. J.-P. Vigué, *Géodésiques complexes et points fixes d'applications holomorphes*, Adv. in Math. **52** (1984), 241–247.

13. ______, *Domaines bornés symétriques*, Geometry Seminar "Luigi Bianchi", Lecture Notes in Math., vol. 1022, Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp. 125–177.

14. H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI, MATHÉMATIQUES (TOUR 45–46, 5E ÉTAGE), 4, PLACE JUSSIEU, 75230 - PARIS CEDEX 05, FRANCE