TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 299, Number 1, January 1987

DIMENSION DE HAUSDORFF DES ENSEMBLES DE ZÉROS ET D'INTERPOLATION POUR $A^\infty(D)$

JACQUES CHAUMAT ET ANNE MARIE CHOLLET

RÉSUMÉ. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$ à frontière régulière ∂D et soit $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D, indéfiniment dérivables dans $\overline{D}$.

Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction de $A^\infty(D)$ s'annulant seulement sur E. C'est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si, pour toute fonction f de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\bar\partial f$ soit plate sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $F - f$ soit plate sur E.

On construit ici des ensembles de dimension de Hausdorff n. Ce résultat est le meilleur possible dans le cas d'ensembles totalement réels.

Le point de vue utilisé pour montrer qu'un sous-ensemble E de ∂D est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ est de vérifier qu'il a la propriété de division par $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, que, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$, plate sur E et nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E, telles que l'on ait, pour tout i dans $\mathbf{N}$, $f_i = Fk_i$.

Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$ à frontière régulière ∂D et soit $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D, indéfiniment dérivables dans $\overline{D}$.

Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction de $A^\infty(D)$ s'annulant seulement sur E. C'est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si, pour toute fonction f de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\bar\partial f$ soit plate sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ telle que $F - f$ soit plate sur E.

La motivation essentielle de cette étude a été la recherche d'ensembles de zéros et d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff la plus grande possible. On construit ici des ensembles de dimension de Hausdorff n (Théorème 25). Ce résultat est le meilleur possible dans le cas d'ensembles totalement réels. En effet, on sait [**5, 6, 11**] qu'un sous-ensemble compact d'une sous-variété V de ∂D, totalement réelle, de dimension n, qui est un ensemble de zéros ou un ensemble d'interpolation pour $A^\infty(D)$ est de mesure n-dimensionnelle nulle dans V. Dans le cas de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, on construit très simplement des ensembles de zéros pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff n (Chapitre III de [**8**]). On ignore s'il existe des ensembles de zéros pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff supérieure à n alors que, dans le cas de $A(D)$, B. S. Henriksen a prouvé que leur dimension de Hausdorff peut atteindre $2n - 1$ [**9**].

Received by the editors October 10, 1985.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 32A30, 32A40; Secondary 32E25 46J15.

Cet article est divisé en quatre parties. On y fait largement usage d'un théorème de Darboux [**1**, **12**] qui assure, pour tout ouvert ω de ∂D suffisamment petit, l'existence d'une fibration de ω par des sous-variétés N_ς de dimension réelle $n-1$, intégrales de la structure de contact sur ∂D, lorsque ς parcourt un ouvert Q de $\mathbf{R}^n$. On sait [**4**] que, étant donné un sous-ensemble fermé E d'une sous-variété N intégrale de la structure de contact sur ∂D, il existe une fonction de $A^\infty(D)$ "support" de E, c'est-à-dire, nulle sur E et de partie réelle strictement positive dans $\overline{D}\backslash E$. Dans une première partie, on raffine cette construction. Etant donné un compact E de ω, on établit l'existence d'une famille C^∞ de fonctions H_ς telle que, pour chaque ς de Q, H_ς soit une fonction support du sous-ensemble $E \cap N_\varsigma$. Dans une deuxième et une troisième partie on utilise diverses propriétés de recouvrement dans l'ensemble Q des paramètres pour "empiler" les sous-ensembles compacts $E \cap N_\varsigma$ afin que l'ensemble E soit un ensemble de zéros (Théorème 10) ou un ensemble d'interpolation d'ordre infini (Théorème 18) pour $A^\infty(D)$. Des méthodes "d'empilement" analogues ont été utilisées dans [**8**, **9** et **14**]. Dans cette étude, les Propositions 9 et 17 qui s'inspirent de travaux antérieurs des auteurs [**6**, **7**] jouent un rôle essentiel. Dans la troisième partie, pour montrer qu'un sous-ensemble E de ∂D est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, on vérifie qu'il a la propriété de division par $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, que, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$, plate sur E et nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$, plates sur E, telles que l'on ait, pour tout i dans $\mathbf{N}$, $f_i = Fk_i$. Ce point de vue a déjà été utilisé dans [**3** et **7**]. La dernière partie est consacrée à l'interprétation des Théorèmes 10 et 18 en termes de dimension de Hausdorff.

1. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, à frontière ∂D de classe C^∞. D est donc défini par la donnée d'une fonction r de classe C^∞ dans un voisinage de $\overline{D}$, l'adhérence de D, telle que

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n, r(z) < 0\} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{grad} r \neq 0 \quad \text{sur } \partial D, \tag{1.2}$$

(1.3) r est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D.

Soit z un point de $\mathbf{C}^n$, on désigne par J la structure presque complexe de $T_z(\mathbf{C}^n)$, l'espace tangent en z à $\mathbf{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Soit M une sous-variété de $\mathbf{C}^n$ et $T_z(M)$ son espace tangent en z; M est dite totalement réelle si, en tout point z de M, on a $T_z(M) \cap JT_z(M) = \{0\}$.

On note $T_z^c(\partial D)$ l'espace tangent complexe en z à ∂D; c'est, par définition, le sous-espace complexe maximal de $T_z(\partial D)$, l'espace tangent en z à ∂D. On a donc $\dim_{\mathbf{C}} T_z^c(\partial D) = n-1$. Si on désigne par $\nu(z)$ le vecteur unitaire de la normale en z à ∂D orienté vers l'extérieur, on a alors la décomposition orthogonale complexe

$$T_z(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}[\nu(z)] \oplus T_z^c(\partial D).$$

Si l'on considère la forme différentielle définie sur ∂D par

$$\langle J\nu(z), V\rangle, \qquad z \in \partial D,\ V \in T_z(\partial D), \tag{1.4}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^{2n}$, on déduit [**12**] de la stricte pseudoconvexité de D que cette forme est de rang maximum et donc qu'elle définit une structure de contact sur ∂D. D'après un théorème de Darboux [**1**], on sait qu'en tout point p de ∂D il existe un système de coordonnées locales réelles $h_1 = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, t)$ défini dans un voisinage ω_1 de p sur ∂D, tel que, en termes de ces coordonnées, la forme différentielle (1.4) s'écrive

$$dt - \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i. \tag{1.5}$$

Le noyau de cette forme différentielle en chaque point z de ∂D n'est autre que $T_z^c(\partial D)$. Les champs de vecteurs $(\partial/\partial x_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, et $(\partial/\partial_{y_i} + x_i\partial/\partial_t)$, $i = 1, \ldots, n-1$, engendrent $T^c(\partial D)$.

Pour tout point p de ∂D, $h = (h_1, r)$ constitue un système de coordonnées locales dans un voisinage ω de p dans $\mathbf{C}^n$. Quitte à réduire ω, à translater et à dilater h on peut supposer de plus $h(\omega) =]-1, 1[^{2n}$, $h(p) = 0$.

Pour tout point p de ∂D, on dit alors que (ω, h) est une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$.

On convient de noter $x = (x_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\varsigma = (y_i, t)$, $i = 1, \ldots, n-1$, et Z la projection de $\mathbf{R}^{2n}$ sur $\mathbf{R}^n$ définie par $Z(x, \varsigma, r) = \varsigma$.

On dit d'une sous-variété N de ∂D dont l'espace tangent est situé en chaque point dans $T^c(\partial D)$ qu'elle est intégrale de la structure de contact sur ∂D.

On note, pour tout couple (z, w) de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, $|z - w|$ la distance euclidienne de z à w et, si E est sous-ensemble de $\mathbf{C}^n$, pour tout z de $\mathbf{C}^n$

$$d(z, E) = \inf_{w \in E} |z - w|.$$

On dit qu'une fonction de classe C^∞ est plate sur un ensemble E si elle s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur E.

De même, on dit qu'une forme différentielle de classe C^∞ est plate sur E si ses coefficients sont plats sur E.

Pour tout sous-ensemble E compact de $\mathbf{R}^N$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on désigne par $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules euclidiennes de rayon ε dont la réunion recouvre E. On sait que l'on peut recouvrir E par des boules de rayon ε dont les centres sont situés sur E, à des distances mutuelles supérieures ou égales à ε et dont le nombre noté $N_\varepsilon(E)$ est équivalent à $\tilde{N}_\varepsilon(E)$. On dira que ces boules forment un ε-recouvrement de E. Pour des références complémentaires sur cette question, on pourra consulter [**6**, Appendice]. L'espace de nature homogène considéré ici sera exclusivement $\mathbf{R}^N$, muni de la distance euclidienne et de la mesure de Lebesgue.

2. NOTATIONS. Pour simplifier la rédaction, on écrira "pour tout z dans E, $a(z) \approx b(z)$" ou encore "pour tout z dans E, $a(z)$ est équivalent à $b(z)$" pour exprimer qu'il existe des constantes c et C, strictement positives, telles que pour tout z dans E, $ca(z) \leq b(z) \leq Ca(z)$. De même, la proposition "pour tout z dans E, $a(z) \ll b(z)$" signifiera qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout z dans E, $a(z) \leq Cb(z)$. Plus généralement, on pourra écrire "$a(z) \ll b(z) + O(1)$" lorsqu'il existera des constantes C et C', strictement positives, telles que, pour tout z dans E, on ait $a(z) \leq Cb(z) + C'$.

Construction d'une famille de fonctions-supports. Etant donné un sous-ensemble compact E de ∂D on dit qu'une fonction f de $A^\infty(D)$ est une fonction-support de E si f s'annule sur E et si sa partie réelle est strictement positive dans $\overline{D} \backslash E$.

3. LEMME. *Soit K un compact $\mathbf{R}^N$. Soit f une fonction bornée de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N$, nulle seulement sur K, plate sur K et positive dans $\mathbf{R}^N\backslash K$. Alors, il existe une fonction s de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N$ vérifiant les propriétés suivantes:*

(3.1) $$s^{-1}(0) = K,$$

(3.2) $$0 \leq s \leq 1 \quad \textit{sur } \mathbf{R}^N,$$

(3.3) *Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$*

$$D^\alpha s = \frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} = 0 \quad \textit{sur } K.$$

(3.4) *Pour tout x de $\mathbf{R}^N$ et tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$ $|D^\alpha s(x)|^2 \leq C(|\alpha|)s(x)$.*

(3.5) *Pour tout $(p, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^N$ $f(x) \leq C(p)s(x)^p$. On dira que s "majore" f.*

PREUVE. Elle s'inspire de celle du Lemme V.24 de [**13**].

A tout entier $r > 0$, on peut associer un entier $\mu(r)$ strictement positif tel que l'on ait

(3.6) $$f(x) \leq d(x, K)^{r^2}, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}^N \text{vérifiant } d(x, K) \leq 2^{-\mu(r)}.$$

On peut supposer la suite $\mu(r)$ strictement croissante et tendant vers $+\infty$. On note γ la fonction définie sur $\mathbf{R}^N\backslash K$ par

$$\gamma(x) = r \log \frac{1}{d(x, K)} \quad \text{si } 2^{-\mu(r+1)} < d(x, K) \leq 2^{-\mu(r)},$$
$$\gamma(x) = 1 \quad \text{si } 2^{-\mu(0)} < d(x, K).$$

Pour chaque entier k, on note $(\varsigma_{j,k})$, $j = 1, \ldots, N_k$, les centres des boules d'un 2^{-k}-recouvrement de K. Puisque les boules sont supposées centrées sur K, tout point vérifiant $d(x, K) \leq 2^{-k}$ est inclus dans au moins une boule de centre $\varsigma_{j,k}$ et de rayon $3 \cdot 2^{-k}$ et dans au plus M boules de centre $\varsigma_{j,k}$ et de rayon $4 \cdot 2^{-k}$. (M est une constante ne dépendant que de la dimension N de $\mathbf{R}^N$.)

Soit χ une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N$, positive, à support dans la boule de centre 0 et de rayon 4, vérifiant $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 3$.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers croissante tendant vers $+\infty$ vérifiant

(3.7) $$\lambda_k \leq r, \quad \text{si } \mu(r) \leq k < \mu(r+1),$$

(3.8) $$\lambda_{k+2} \leq 2\lambda_k, \quad \text{pour tout } k,$$

(3.9) $$\lambda_k \leq k, \quad \text{pour tout } k.$$

Soit σ la fonction définie sur $\mathbf{R}^N$ par

(3.10) $$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{N_k} \chi[2^k(x - \varsigma_{j,k})].$$

C'est une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N\backslash K$.

Soit x un point de $\mathbf{R}^N \backslash K$ tel que $d(x, K) < 1/4$. Il existe un entier k_x tel que l'on ait

$$2^{-k_x-1} < d(x, K) \leq 2^{-k_x}. \tag{3.11}$$

Pour chaque k, $k \leq k_x$, il existe $\varsigma_{j(x),k}$ tel que l'on ait $\chi[2^k(x - \varsigma_{j(x),k})] = 1$. On a donc

$$\sigma(x) \geq \sum_{k=0}^{k_x} \lambda_k \geq \lambda_{[k_x/2]} k_x/2.$$

Ici $[k_x/2]$ désigne la partie entière de $k_x/2$. On déduit de là, en utilisant (3.11), qu'il existe une fonction $\omega(t)$ positive tendant vers $+\infty$ quand t tend vers 0, telle que l'on ait

$$\sigma(x) \geq \omega[d(x, K)] \log \frac{1}{d(x, K)}. \tag{3.12}$$

Pour tout k, $k \geq k_x + 2$ et pour tout j, $j = 1, \ldots, N_k$, on a $\chi[2^k(x - \varsigma_{j,k})] = 0$. On a donc, d'après (3.8)

$$\sigma(x) \leq M \sum_{k=0}^{k_x+2} \lambda_k \leq M(k_x + 3)\lambda_{k_x+2} \leq 2M(k_x + 3)\lambda_{k_x}$$

et de là, en utilisant (3.7) et (3.11)

$$\sigma(x) \leq 8M\gamma(x). \tag{3.13}$$

On a, pour tout multi-indice α,

$$D^\alpha \sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{N_k} D^\alpha \chi[2^k(x - \varsigma_{j,k})]$$

et donc

$$\begin{aligned} |D^\alpha \sigma(x)| &\leq C(|\alpha|) M \sum_{k=0}^{k_x+2} \lambda_k (2^k)^{|\alpha|} \\ &\leq C(|\alpha|) M (k_x + 3) 2\lambda_{k_x} (2^{k_x+2})^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

De là, en utilisant (3.9) et (3.11), on obtient

$$|D^\alpha \sigma(x)| \leq C(|\alpha|)[d(x, K)]^{-(|\alpha|+1)}. \tag{3.14}$$

On considère la fonction $s = \exp -\sigma$. Elle est de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^N \backslash K$. On a, d'après (3.12) et (3.14),

$$\begin{aligned} |D^\alpha s(x)|^2 &\leq C(|\alpha|)[d(x, K)]^{-4|\alpha|} \exp[-2\sigma(x)] \\ &\leq C(|\alpha|) \exp[-\sigma(x)]. \end{aligned}$$

Ceci prouve que s admet un prolongement C^∞ à $\mathbf{R}^N$ vérifiant les propriétés (3.1) à (3.4).

Pour établir (3.5), on remarque que pour tout p entier et tout x de $\mathbf{R}^N$ vérifiant $2^{-\mu(r+1)} < d(x, K) \leq 2^{-\mu(r)}$ on a, d'après (3.6) et (3.13)

$$f(x)[s(x)]^{-p} = f(x) \exp[-p\sigma(x)] \leq d(x, K)^{r^2} \exp[-8Mp\gamma(x)]$$

donc

$$f(x)[s(x)]^{-p} \leq d(x,K)^{r^2-8Mpr}$$

Lorsque x tend vers K, la limite de $f(x)[s(x)]^{-p}$ est nulle; il existe donc une constante $C_p > 0$ telle que l'on ait

$$f(x)[s(x)]^{-p} \leq C(p).$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.

4. Soit p un point de ∂D, (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$; on note, pour tout ς de $]-1,1[^n$,

$$N_\varsigma = h^{-1}[\{(x,\varsigma,0); x \in]-1,1[^n\}]. \tag{4.1}$$

On vérifie que N_ς est une sous-variété de ∂D intégrale de la structure de contact sur ∂D. Soit z un point de ω, on note, pour tout ς de $]-1,1[^n$

$$n_\varsigma(z) = (x(z), \varsigma, 0) \tag{4.2}$$

et

$$P_\varsigma(z) = h^{-1}(n_\varsigma(z)). \tag{4.3}$$

5. LEMME. *Soit p un point de ∂D, (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$ et K un compact de $\mathbf{R}^{2n-1} \times \{0\}$ inclus dans $h(\omega) =]-1,1[^{2n}$. Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, nulle seulement sur K, plate sur K et positive dans $\mathbf{R}^{2n} \backslash K$ et s une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, plate sur K et "majorant" f dont l'existence est assurée par le Lemme 3.*

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et $K \subset]-a,a[^{2n-1} \times \{0\}$. Il existe une fonction $H(\varsigma; z)$ holmorphe en z dans D de classe C^∞ dans $[-a,a]^n \times \overline{D}$ telle que l'on ait, pour tout ς de $[-a,a]^n$,

$$H(\varsigma; z) = s(x(z), \varsigma, 0) \quad \textit{si } z \textit{ appartient à } N_\varsigma \cap \omega, \tag{5.1}$$

$$H(\varsigma; z) = 0 \textit{ si et seulement si } z \textit{ appartient à } N_\varsigma \cap h^{-1}(K), \tag{5.2}$$

$$\operatorname{Re} H(\varsigma, z) \geq 0, \textit{ pour tout } z \textit{ de } \overline{D}, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H(\varsigma, z) &\approx -r(z) + d(z, N_\varsigma)^2 + s(x(z), \varsigma, 0) \\ &\approx -r(z) + |\varsigma(z) - \varsigma|^2 + s(x(z), \varsigma, 0) \end{aligned} \tag{5.4}$$

pout tout z de $\omega \cap \overline{D}$,

$$\begin{aligned} |H(\varsigma, z)| &\approx \operatorname{Re} H(\varsigma, z) + |\langle J\nu(P_\varsigma(z)), P_\varsigma(z) - z\rangle| \\ &\approx \operatorname{Re} H(\varsigma, z) + |t - t(z) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(z)(y_i - y_i(z))| \end{aligned} \tag{5.5}$$

pour tout z de $\omega \cap \overline{D}$.

PREUVE. Soit a un réel, $0 < a < 1$, tel que K soit inclus dans $]-a,a[^{2n} \times \{0\}$. On note

$$\Omega(\varsigma, a, \varepsilon) = h^{-1}[\{(x, \varsigma', r); x \in]-a,a[^n, \ |\varsigma - \varsigma'| < \varepsilon, \ |r| < \varepsilon\}].$$

Pour tout ς de $[-a,a]^n$, on applique la Proposition 24 de [**4**] à la sous-variété N_ς. On peut vérifier alors qu'il existe des constantes c_1 et ε_1 strictement positives et indépendantes de ς et de z telles que, si on note $\Omega^1_\varsigma = \Omega(\varsigma, a, \varepsilon_1)$, on ait, pour tout ς de $[-a,a]^n$, une fonction $F(\varsigma, z)$ de classe C^∞ dans $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a,a]^n, z \in \Omega^1_\varsigma\}$ vérifiant

(5.6) $\qquad F(\varsigma, z) = 0$ si z appartient à $N_\varsigma \cap \Omega^1_\varsigma$,

(5.7) $\qquad \overline{\partial}_z F = 0$ à l'ordre infini si z appartient à $N_\varsigma \cap \Omega^1_\varsigma$,

(5.8) $\qquad \operatorname{Re} F(\varsigma, z) \geq c_1[d(z, N_\varsigma)^2 - r(z)]$, pour tout z de $\Omega^1_\varsigma \cap \overline{D}$,

(5.9) $\qquad$ grad $\operatorname{Re} F(\varsigma; z) = -\nu(z)$ si z appartient à $N_\varsigma \cap \Omega^1_\varsigma$.

On considère maintenant, pour tout ς de $[-a,a]^n$, la restriction de $s \circ h^{-1}$ à N_ς. On vérifie, en suivant les idées de la preuve de la Proposition 31 de [**4**] que cette fonction admet, pour tout ς de $[-a,a]^n$, une extension $S(\varsigma; z)$ de classe C^∞ dans $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a,a]^n, z \in \omega\}$ qui satisfait aux conditions suivantes: il existe des constantes, ε_2, C, C' et c_2 strictement positives, indépendantes de ς et de z, telles que l'on ait, pour tout ς de $[-a,a]^n$,

(5.10) $\quad S(\varsigma, z) = s \circ h^{-1}(z)$ si z appartient à $N_\varsigma \cap \Omega^2_\varsigma$,

(5.11) $\quad \overline{\partial}_z S = 0$ à l'ordre infini sur $N_\varsigma \cap \Omega^2_\varsigma$,

(5.12) $\quad \operatorname{Re} S(\varsigma, z) \geq s(x(z), \varsigma, 0) - c_2 d(z, N_\varsigma)^2$, pour tout z dans $\Omega^2_\varsigma \cap \overline{D}$,

(5.13) $\quad |\operatorname{grad} S(\varsigma, z)|^2 \leq C |\operatorname{grad} s(x(z), \varsigma, 0)|^2 \leq C' s(x(z), \varsigma, 0)$, pour tout z appartenant à $N_\varsigma \cap \Omega^2_\varsigma$.

Soit $\Omega_\varsigma = \Omega^1_\varsigma \cap \Omega^2_\varsigma$. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout ς de $[-a,a]^n$, la fonction G définie par $G(\varsigma, z) = F(\varsigma, z) + cS(\varsigma, z)$ est de classe C^∞ dans $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a,a]^n, z \in \Omega_\varsigma\}$ et vérifie, pour tout ς de $[-a,a]^n$ et tout z de $\Omega_\varsigma \cap \overline{D}$,

(5.14) $\qquad \operatorname{Re} G(\varsigma, z) \approx -r(z) + d(z, N_\varsigma)^2 + s(x(z), \varsigma, 0)$,

(5.15) $\qquad |G(\varsigma, z)| \approx \operatorname{Re} G(\varsigma, z) + |\langle J\nu(P_\varsigma(z)), P_\varsigma(z) - z\rangle|$.

De (5.8) et (5.12), on déduit la minoration de $\operatorname{Re} G(\varsigma, z)$. Les autres estimations sont des conséquences de la formule de Taylor appliquée entre z et $P_\varsigma(z)$, compte tenu de la propriété (3.4) de s. On détaille seulement ici la minoration de $|G(\varsigma, z)|$. On a, sur $\{(\varsigma, z); \varsigma \in [-a,a]^n, z \in \Omega_\varsigma\}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} G(\varsigma, z) &= \operatorname{Im} F(\varsigma, z) + c \operatorname{Im} S(\varsigma, z),\\
\operatorname{Im} F(\varsigma, z) &= \langle J\nu(P_\varsigma(z)), z - P_\varsigma(z)\rangle + O|z - P_\varsigma(z)|^2,\\
\operatorname{Im} S(\varsigma, z) &= \langle \operatorname{grad} \operatorname{Im} S(\varsigma, P_\varsigma(z)), z - P_\varsigma(z)\rangle + O|z - P_\varsigma(z)|^2,
\end{aligned}$$

et donc d'après (3.4)

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im} S(\varsigma, z)| &\ll |\operatorname{grad} s(x(z), \varsigma, 0)|^2 + |z - P_\varsigma(z)|^2\\
&\ll s(x(z), \varsigma, 0) + |z - P_\varsigma(z)|^2.
\end{aligned}$$

De là, on a

$$|\operatorname{Im} G(\varsigma, z)| \gg |\langle J\nu(P_\varsigma(z)), z - P_\varsigma(z)\rangle| - |z - P_\varsigma(z)|^2 - s(x(z), \varsigma, 0).$$

Ensuite, on écrit

$$|G(\varsigma,z)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Re} G(\varsigma,z) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\operatorname{Im} G(\varsigma,z)|,\ 0<\beta\leq 1,$$

et en remarquant que $|P_\varsigma(z)-z|$ est équivalent à $d(z,N_\varsigma)$ on peut choisir β suffisament petit pour que l'on ait

$$|G(\varsigma,z)| \gg \operatorname{Re} G(\varsigma,z) + |\langle J\nu(P_\varsigma(z)), P_\varsigma(z)-z\rangle|.$$

Compte tenu des propriétés (5.7) et (5.11), on corrige $G(\varsigma,z)$ en résolvant comme dans le Théorème 21 de [**4**] un problème de $\overline{\partial}$. On obtient alors une fonction $H(\varsigma,z)$ holomorphe en z dans D, de classe C^∞ dans $[-a,a]^n\times\overline{D}$ telle que

$$\operatorname{Re} H(\varsigma,z) > 0 \quad \text{sur } \{(\varsigma,z);\varsigma\in[-a,a]^n, z\in\overline{D}\backslash h^{-1}(K)\cap N_\varsigma\}. \tag{5.16}$$

Il existe de plus une fonction $u(\varsigma,z)$ de partie réelle strictement négative et de classe C^∞ dans $[-a,a]^n\times\overline{D}$ et des réels a' et ε', $0<a'<a$ et $0<\varepsilon'<\inf(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ tels que sur $\Omega'_\varsigma=\Omega(\varsigma,a',\varepsilon')$, on ait

$$H(\varsigma,z)=\frac{G(\varsigma,z)}{1-u(\varsigma,z)G(\varsigma,z)}.$$

Des propriétés de G et de u, on déduit qu'il existe ε'' et a'', $0<\varepsilon''<\varepsilon'$ et $0<a''<a'$, tels que, si on note $\Omega''_\varsigma=\Omega(\varsigma,a'',\varepsilon'')$, on ait

$$|1-u(\varsigma,z)G(\varsigma,z)| \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{sur } \{(\varsigma,z);\varsigma\in[-a,a]^n, z\in\Omega''_\varsigma\}.$$

On déduit, de là, des estimations analogues à (5.14) et (5.15) portant sur H au lieu de G, avec des constantes indépendantes de ς et de z, pour tout ς de $[-a,a]^n$ et tout z de $\Omega''_\varsigma\cap\overline{D}$. Puisque, d'après (5.16), il existe $m>0$ tel que

$$\operatorname{Re} H(\varsigma,z)\geq m \quad \text{sur } \{(\varsigma,z),\ \varsigma\in[-a,a]^n, z\in\overline{D}\backslash\Omega''_\varsigma\},$$

les estimations (5.4) et (5.5) sont satisfaites sur $\{(\varsigma,z);\varsigma\in[-a,a]^n, z\in\omega\cap\overline{D}\}$. Ces estimations ont des formes différentes mais équivalentes selon qu'on les écrive ou non en fonction des coordonnées locales sur ω.

Ensembles de zéros.

6. DÉFINITION. Un sous-ensemble compact E de ∂D est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que $E=\{z\in\overline{D}; f(z)=0\}$.

7. Dans tout ce qui suit, (ω,h) désigne une carte de Darboux au voisinage d'un point p de ∂D et K un compact de $]-1,1[^{2n-1}\times\{0\}$ inclus donc dans $h(\omega)$. On note $E=Z(K)$. On rappelle que Z est la projection définie dans $\mathbf{R}^{2n}$ par $Z(x,\varsigma,r)=\varsigma$.

8. Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, nulle seulement sur K, plate sur K et positive dans $\mathbf{R}^{2n}\backslash K$. Soit s une fonction qui majore f, plate sur K, dont l'existence est assurée par le Lemme 3. On note par $\delta(z,K)$ la fonction définie pour tout z de $\overline{D}$ par

$$\delta(z,K)=\inf_{\varsigma\in E}[|\varsigma(z)-\varsigma|+s(x(z),\varsigma,0)-r(z)] \tag{8.1}$$

si z appartient à ω,

$$\delta(z,K)=1 \quad \text{si } z \text{ n'appartient pas à } \omega. \tag{8.2}$$

Clairement $\delta(z,K)$ tend vers 0, lorsque z tend vers $h^{-1}(K)$.

La définition de δ, comme celle de H et de s, dépend du choix de la fonction f. Les résultats établis dans les paragraphes 9 à 17 ne necessiteront aucun choix particulier de f. On suppose donc une telle fonction choisie une fois pour toutes. Par contre pour établir le Théorème 18 il faudra utiliser pour définir s, H et δ une fonction f particulière qui sera précisée dans la preuve.

9. PROPOSITION. *Soit (ω,h) une carte de Darboux au voisinage d'un point p de ∂D et K un compact de $]-1,1[^{2n-1}\times\{0\}$ inclus dans $h(\omega)$ tel que, si on note $E=Z(K)$, on ait*

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)d\varepsilon<\infty; \tag{9.1}$$

alors il existe une fonction φ holomorphe dans D, de classe C^∞ et de partie réelle strictement positive dans $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$ qui vérifie les propriétés suivantes

(a) *il existe une constante $c_1>0$ telle que, pour tout z de $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$, on ait*

$$\operatorname{Re}\varphi(z)\geq\omega[\delta(z,K)]\log\frac{1}{c_1\delta(z,K)}$$

où $\omega(x)$ est une fonction de x, à valeurs positives qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0,

(b) *pour tout multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de longueur $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $D\backslash h^{-1}(K)$, on ait*

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\varphi(z)\right|=|D^\alpha\varphi(z)|\leq C(|\alpha|)\delta(z,K)^{-2(|\alpha|+1)}.$$

PREUVE. Puisque $N_\varepsilon(E)$ est équivalente à une fonction décroissante de ε, la condition (9.1) est équivalente à la condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}N_{2^{-k}}(E)2^{-k}<\infty. \tag{9.2}$$

Il existe alors une suite croissante λ_k de réels positifs tendant vers $+\infty$ tels que, si l'on note $N_k=N_{2^{-k}}(E)$, l'on ait

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kN_k2^{-k}<\infty. \tag{9.3}$$

Soit φ la fonction définie pour tout z dans D par

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_k\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\varsigma_{j,k},z)} \tag{9.4}$$

où H est la fonction introduite dans le Lemme 5 et où, pour chaque entier k, $(\varsigma_{j,k})$, $j=1,\dots,N_k$, désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j=1,\dots,N_k$, d'un 2^{-k}-recouvrement de E. Des propriétés de H, on déduit que l'on a, pour tout z dans ω et tout indice (j,k),

$$|2^{-k}+H(\varsigma_{j,k},z)|\geq|H(\varsigma_{j,k},z)|\geq-r(z)+|\varsigma(z)-\varsigma_{j,k}|^2+s(x(z),\varsigma_{j,k},0)$$

et donc, puisque $\varsigma_{j,k}$ appartient à E,

$$|2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, z)| \gg \inf_{\varsigma \in E} [|\varsigma(z) - \varsigma| + s(x(z), \varsigma, 0) - r(z)]^2. \tag{9.5}$$

On conclut alors d'après (8.1)

$$|2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, z)| \gg \delta(z, K)^2. \tag{9.6}$$

De (9.3), (9.6) et des propriétés de H, on déduit que φ est holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\overline{D} \backslash h^{-1}(K)$ et que, pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha|$, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\omega \backslash h^{-1}(K)$, on ait

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leq C(|\alpha|) \delta(z, K)^{-2(|\alpha|+1)}. \tag{9.7}$$

Il reste donc à établir la minoration de la partie réelle de φ. Soit donc z un point de $\omega \backslash h^{-1}(K)$ vérifiant $\delta(z, K) < \frac{1}{4}$; il existe alors un entier $k_z > 1$ tel que l'on ait

$$2^{-k_z - 1} < \delta(z, K) \leq 2^{-k_z}. \tag{9.8}$$

On considère w^z un point de E qui vérifie

$$\delta(z, K) = |\varsigma(z) - w^z| + s(x(z), w^z, 0) - r(z). \tag{9.9}$$

Alors, pour chaque entier k, w^z appartient à au moins une boule du 2^{-k}-recouvrement de E. De la positivité de $\operatorname{Re} H$, on déduit que l'on peut minorer $\operatorname{Re} \varphi$ en ne gardant, pour chaque k, dans la sommation portant sur j, qu'une seule boule du 2^{-k}-recouvrement; on garde une des boules qui contiennent w^z et on désigne son centre par ς_k^z. On a donc

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \operatorname{Re} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\varsigma_k^z, z)}. \tag{9.10}$$

Pour tout k, on applique la formule de Taylor à $H(\varsigma_k^z, z)$ entre z et $P_{\varsigma_k^z}(z) = h^{-1}(x(z), \varsigma_k^z, 0)$. Compte-tenu de (5.1), on a, pour tout $k \geq 1$,

$$|H(\varsigma_k^z, z) - s(x(z), \varsigma_k^z, 0)| \ll |\varsigma(z) - \varsigma_k^z| - r(z).$$

On a aussi

$$|s(x(z), \varsigma_k^z, 0) - s(x(z), w^z, 0)| \ll |\varsigma_k^z - w^z|$$

et donc

$$\begin{aligned} |H(\varsigma_k^z, z)| &\ll s(x(z), w^z, 0) + |\varsigma(z) - \varsigma_k^z| + |\varsigma_k^z - w^z| - r(z) \\ &\ll s(x(z), w^z, 0)| + |\varsigma(z) - w^z| + |w^z - \varsigma_k^z| - r(z). \end{aligned}$$

De là, d'après la définition (9.9) de w^z, on a, pour tout k,

$$|H(\varsigma_k^z, z)| \ll \delta(z, K) + 2^{-k}$$

et donc, d'après (9.8)

$$|H(\varsigma_k^z, z)| \ll 2^{-k_z} + 2^{-k}.$$

On a alors, pour tout k, $k \leq k_z$,

$$|H(\varsigma_k^z, z)| \ll 2^{-k}.$$

On déduit de là, que, pour tout z de $\omega\backslash h^{-1}(K)$ et pour tout k, $k \leq k_z$, on a

$$\mathrm{Re}\frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\varsigma_k^z, z)} \gg 1.$$

Toujours d'après la positivité de $\mathrm{Re}\, H$, en utilisant (9.10), on conclut, si on note $[a]$ la partie entière de a,

$$\mathrm{Re}\,\varphi(z) \gg \sum_{k=[k_z/2]}^{k_z} \lambda_k \gg \frac{k_z}{2}\lambda_{[k_z/2]}.$$

De (9.8), on déduit

$$k_z \approx \log\frac{1}{\delta(z,K)} \quad \text{et} \quad \lambda_{[k_z/2]} = \omega(\delta(z,K))$$

où $\omega(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, d'après la définition de la suite λ_k.

Ceci achève la preuve de la Proposition 9, compte tenu de la définition de $\delta(z,K)$ lorsque z n'appartient pas à ω.

10. THÉORÈME. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞ et p un point de ∂D. Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$ et K un compact de $]-1,1[^{2n-1}\times\{0\}$ tel que, si on note $E = Z(K)$, on ait*

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)d\varepsilon < \infty; \tag{10.1}$$

alors $h^{-1}(K)$ est un sous-ensemble fermé de ∂D qui est l'ensemble des zéros d'une fonction L de $A^\infty(D)$. De plus, $h^{-1}(K)$ est l'ensemble des zéros communs à L et à toutes ses dérivées.

PREUVE. Soit φ la fonction introduite dans la Proposition 9. Alors, si on pose $L(z) = \exp -\varphi(z)$, L est holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$. En appliquant une formule de dérivation des fonctions composées, on vérifie comme dans [**6**] que, pour tout multi-indice α, il existe une constante $C(|\alpha|)$ telle que, pour tout z de $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$, on ait

$$|D^\alpha L(z)| \leq C(|\alpha|)|L(z)|\delta(z,K)^{-4|\alpha|}$$

et, de là, d'après la conclusion (a) de la Proposition 9

$$|D^\alpha L(z)| \leq C(|\alpha|)[\delta(z,K)]^{\omega(\delta(z,K))-4|\alpha|}.$$

On en déduit alors que L se prolonge en une fonction de $A^\infty(D)$ nulle seulement sur $h^{-1}(K)$ et dont toutes les dérivées s'annulent sur $h^{-1}(K)$.

Division et interpolation.

11. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D. On note C_E^∞ [resp. A_E^∞] l'idéal de $C^\infty(\overline{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur E.

Un sous-ensemble fermé E de ∂D vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$ si et seulement si pour toute famille $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de fonctions de C_E^∞, il existe une fonction F de A_E^∞, nulle seulement sur E et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de C_E^∞ telles que l'on ait $f_i = Fk_i$, pour tout i dans $\mathbf{N}$.

Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ si pour toute fonction g de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\overline{\partial} g$ soit plate sur E, il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que $f-g$ soit plate sur E.

12. PROPOSITION [**7**]. *Un sous-ensemble fermé E de ∂D est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ s'il vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

13. PROPOSITION [**7**]. *Une réunion finie de sous-ensembles fermés de ∂D vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

14. LEMME DE DIVISION PAR $C^\infty(\overline{D})$ [**7**, **13**]. *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D et $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille de fonctions de C^∞_E. Alors il existe une fonction g de C^∞_E positive et ne s'annulant que sur E et des fonctions $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de C^∞_E telles que l'on ait $f_i = gh_i$, pour tout i dans $\mathbf{N}$.*

Si, de plus, f est une fonction de C^∞_E ne s'annulant que sur E telle que l'on ait $g \ll |f|$, alors, il existe des fonctions $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de C^∞_E telles que l'on ait $f_i = fk_i$, pour tout i dans $\mathbf{N}$.

15. LEMME. *Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage d'un point p de ∂D et $\gamma\colon]-1,1[\to Z(]-1,1[^{2n})$ une courbe de classe C^∞ vérifiant $\gamma(0)=0$ telle que, si on note $M = \{(x,\varsigma,r); x\in]-1,1[^{n-1}, \varsigma\in\gamma(]-1,1[),\ r=0\}$, M vérifie la propriété suivante:*

(15.1) *l'espace tangent à M n'est pas dans le noyau de la forme différentielle $dt-\sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i$.*

Soit K un sous-ensemble compact de M. Soient a et b deux nombres réels, $0<a<1$, $0<b<1$, vérifiant

$$K \subset \{(x,\varsigma,0), x\in]-a,a[^{n-1},\ \varsigma\in\gamma(]-b,b[)\} \subset]-a,a[^{2n-1}\times\{0\}. \tag{15.2}$$

Soit $H(\varsigma, z)$ la fonction construite dans le Lemme 5. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ relativement compact de $h^{-1}(K)$ dans ω et une application π de classe C^∞ de $\mathcal{O}$ dans $\gamma]-b,b[$ tels que l'on ait

$$\pi(z)=\varsigma(z) \text{ si } z \text{ appartient à } \mathcal{O}\cap h^{-1}(M) \text{ et} \tag{15.3}$$

$$|H(\gamma(u),z)| \approx \operatorname{Re} H(\gamma(u),z) + |\gamma(u)-\pi(z)| \\ \text{pour tout } z \text{ dans } \mathcal{O}\cap\overline{D} \text{ et tout } u \text{ dans }]-b,b[. \tag{15.4}$$

PREUVE. Pour tout u de $]-1,1[$ on note $\gamma(u) = (y_i(u), t(u))$, $i=1,\ldots,n-1$, et on pose, pour tout u de $]-1,1[$ et tout z dans ω,

$$\mathcal{I}(u,z) = t(u)-t(z) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(z)(y_i(u)-y_i(z)).$$

Si $h(z)$ appartient à M, il existe une unique valeur de u dans $]-1,1[$ notée u_z telle que l'on ait $\varsigma(z)=\gamma(u_z)$. On a alors $\mathcal{I}(u_z,z)=0$ et

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{I}(u,z)|_{u=u_z} = t'(u_z) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(z) y_i'(u_z).$$

On note
$$M_1 = \{(x, \varsigma, 0); x \in]-a, a[^n, \varsigma \in \gamma(]-b, b[)\}.$$
L'hypothèse (15.1) faite sur M implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour tout z dans $h^{-1}(M_1)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{I}(u,z)|_{u=u_z}\right| \geq c. \tag{15.5}$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $\mathcal{I}(u, z)$. Il existe donc un voisinage $\mathcal{O}$ relativement compact de $h^{-1}(K)$ dans ω, contenant $h^{-1}(M_1)$ et une application p de $\mathcal{O}$ dans $]-1, 1[$ de classe C^∞ telle que l'on ait

$$\mathcal{I}(p(z), z) = 0 \quad \text{pour tout } z \text{ de } \mathcal{O}, \tag{15.6}$$
$$p(z) = u_z \quad \text{pour tout } z \text{ de } h^{-1}(M_1). \tag{15.7}$$

On note π l'application définie par $\pi(z) = \gamma(p(z))$. Quitte à réduire $\mathcal{O}$, c'est une application de classe C^∞ de $\mathcal{O}$ sur $\gamma(]-b, b[)$.

Pour tout z de $\mathcal{O}$, un développement de Taylor de $\mathcal{I}(u, z)$ au voisinage de $u = p(z)$ conduit d'après (15.6) à

$$\mathcal{I}(u, z) = [u - p(z)]\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{I}(p(z), z) + O(|u - p(z)|^2). \tag{15.8}$$

On peut réduire $\mathcal{O}$ en sorte que, d'après (15.5), on ait, pour tout z de $\mathcal{O}$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{I}(p(z), z)\right| \geq \frac{c}{2}. \tag{15.9}$$

On déduit alors de (15.8) et de (15.9) qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que $|u - p(z)| < \eta$ implique $|\mathcal{I}(u, z)| \gg |u - p(z)|$. On a clairement, par ailleurs, $|\mathcal{I}(u, z)| \ll |u - p(z)|$. De la régularité de γ, on conclut donc qu'il existe une constante $\eta' > 0$ telle que, pour tout z de $\mathcal{O}$ et tout u de $]-b, b[$ vérifiant $|\gamma(u) - \pi(z)| < \eta'$, on ait

$$|\mathcal{I}(u, z)| \approx |\gamma(u) - \pi(z)| \tag{15.10}$$

et donc, si H est la fonction associée au compact K introduite dans le Lemme 5, d'après (5.5), pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout u de $]-b, b[$ vérifiant $|\gamma(u) - \pi(z)| < \eta'$,

$$|H(\gamma(u), z)| \approx \operatorname{Re} H(\gamma(u), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|. \tag{15.11}$$

Pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout u dans $]-b, b[$ vérifiant $|\gamma(u) - \pi(z)| \geq \eta'$ l'équivalence (15.11) est trivialement vérifiée car $H(\gamma(u), z)$ ne peut s'annuler que si $\varsigma(z) = \gamma(u)$ et dans ce cas $\varsigma(z) = \pi(z)$. Ceci établit donc (15.4).

16. COROLLAIRE. *Les notations et les hypothèses sont celles du Lemme* 15. *On note, pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout ς dans* $]-1, 1[^n$,

$$\theta(\varsigma, z) = |\varsigma(z) - \varsigma|^2 + s(x(z), \varsigma, 0) - r(z). \tag{16.1}$$

On a alors, pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et pour tout u dans $]-b, b[$,

$$|H(\gamma(u), z)| \approx \theta(\pi(z), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|, \tag{16.2}$$
$$\operatorname{Re} H(\gamma(u), z) \ll \theta(\pi(z), z) + |\gamma(u) - \pi(z)|^2. \tag{16.3}$$

PREUVE. De (15.4) et de (5.4) on déduit que, pour tout z dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$ et tout u dans $]-b, b[$, on a

$$\operatorname{Re} H(\gamma(u), z) \approx |\varsigma(z) - \gamma(u)|^2 + s(x(z), \gamma(u), 0) - r(z) \tag{16.4}$$

et

$$|H(\gamma(u), z)| \approx |\varsigma(z) - \gamma(u)|^2 + s(x(z), \gamma(u), 0) - r(z) + |\gamma(u) - \pi(z)|. \tag{16.5}$$

On note pour tout z fixé dans $\mathcal{O} \cap \overline{D}$

$$\tau(\varsigma) = s(x(z), \varsigma, 0) + |\varsigma(z) - \varsigma|^2 - r(z). \tag{16.6}$$

On applique une formule de Taylor à la fonction τ entre $\gamma(u)$ et $\pi(z)$. On a alors

$$\tau(\gamma(u)) = \tau(\pi(z)) + \langle \operatorname{grad} \tau(\pi(z)), \gamma(u) - \pi(z)\rangle + O(|\gamma(u) - \pi(z)|^2),$$

d'où

$$\tau(\gamma(u)) \leq \tau(\pi(z)) + |\operatorname{grad} \tau(\pi(z))||\gamma(u) - \pi(z)| + O(|\gamma(u) - \pi(z)|^2),$$

et donc, puisque d'après la définition de (16.6) de τ on a

$$|\operatorname{grad} \tau(\pi(z))| \leq |\operatorname{grad} s(x(z), \pi(z), 0)| + 2|\pi(z) - \varsigma(z)|,$$

on conclut, en utilisant la propriété (3.4) de s, à l'ordre 1,

$$\tau(\gamma(u)) \ll \tau(\pi(z)) + |\gamma(u) - \pi(z)|^2. \tag{16.7}$$

Ceci, compte tenu de (16.4), (16.5) et (16.6), établit (16.3) ainsi que la majoration de $|H(\gamma(u), z)|$ dans (16.2).

Pour obtenir la minoration de $|H(\gamma(u), z)|$, on échange les rôles joués par $\gamma(u)$ et $\pi(z)$. On a

$$\tau(\gamma(u)) \gg \tau(\pi(z)) - |\gamma(u) - \pi(z)|^2 \tag{16.8}$$

et, d'après (16.5) et (16.6)

$$|H(\gamma(u), z)| \gg \tfrac{1}{2}\tau(\gamma(u)) + |\gamma(u) - \pi(z)|,$$

ce qui donne en utilisant (16.8)

$$|H(\gamma(u), z)| \gg \tau(\pi(z)) + |\gamma(u) - \pi(z)|.$$

Ceci achève la preuve de (16.2).

17. PROPOSITION. *Les notations et les hypothèses sont toujours celles du Lemme* 15. *On note E la projection $Z(K)$ de K sur $\gamma(]-b, b[)$ et on suppose de plus que l'on a*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\,d\varepsilon \ll r\left(\log\frac{1}{r} + O(1)\right), \tag{17.1}$$

pour tout r, $0 < r < 1$, et toute boule euclidienne B_r de rayon r centrée sur E.

Il existe alors une fonction ψ holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$ qui vérifie les estimations suivantes

(17.2) $\operatorname{Re}\psi(z) \gg \log\dfrac{1}{\delta(z, K)} + O(1)$, *pour tout z de $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$,*

(17.3) $\operatorname{Re}\psi(z) \ll \log\dfrac{1}{\delta(z, K)} + O(1)$, *pour tout z de $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$,*

(17.4) $|D^\alpha \psi(z)| \ll C(|\alpha|)\delta(z, K)^{-2(|\alpha|+1)}$, *pour tout multi-indice de longueur $|\alpha|$ et tout z de $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$*

($\delta(z, K)$ a été défini dans le paragraphe 8).

PREUVE. La condition (17.1) implique la condition (9.1), à savoir $\int_0^1 N_\varepsilon(E)d\varepsilon < \infty$, qui s'écrit encore avec la notation $N_k = N_{2^{-k}}(E)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} N_k < \infty.$$

Soit ψ la fonction définie sur D par

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, z)}$$

où H est la fonction introduite dans le Lemme 5 et où, pour chaque entier k, $(\varsigma_{j,k})$, $j = 1, \dots, N_k$, désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_k$, d'un 2^{-k}-recouvrement de E. On sait que, par définition, $\varsigma_{j,k}$ appartient à E. On vérifie, comme dans la preuve de la Proposition 9, que ψ est holomorphe dans D, de classe C^∞ et de partie réelle strictement positive dans $\overline{D} \backslash h^{-1}(K)$ et satisfait aux estimations (17.2) et (17.4) de la proposition.

On se propose maintenant d'obtenir l'estimation (17.3). On a, pour tout z de $\overline{D} \backslash h^{-1}(K)$,

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \operatorname{Re} H(\varsigma_{j,k}, z)}{|2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, z)|^2}.$$

De là, en utilisant le Corollaire 16, si z est dans θ et si on suppose que l'on a $\theta(\pi(z), z) \leq 1$, on obtient

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \theta(\pi(z), z) + |\varsigma_{j,k} - \pi(z)|^2}{2^{-2k} + \theta(\pi(z), z)^2 + |\varsigma_{j,k} - \pi(z)|^2}$$

et donc

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll O(1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \theta(\pi(z), z)}{2^{-2k} + \theta(\pi(z), z)^2 + |\varsigma_{j,k} - \pi(z)|^2}. \tag{17.5}$$

La majoration (17.5) ainsi obtenue est semblable à la majoration (9.4) obtenue dans [**7**]; on poursuit la preuve de façon analogue en faisant jouer à $\theta(\pi(z), z)$ le rôle joué par $\rho(\pi(z), z)$ dans [**7**].

On considère deux cas en notant

$$\theta(E, z) = \inf_{\varsigma \in E} \theta(\varsigma, z). \tag{17.6}$$

Premier cas: $\theta(\pi(z), z) > \theta(E, z)^2$. On obtient alors en poursuivant le calcul comme dans [**7**]

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\theta(\pi(z), z)} + O(1) \ll \log \frac{1}{\delta(z, K)} + O(1) \tag{17.7}$$

car, clairement, on a pour tout z de $\overline{D}$, $\theta(\pi(z), z) \gg \delta(z, K)^2$.

Deuxième cas: $\theta(\pi(z), z) \leq \theta(E, z)^2$. On a alors, pour tout k et pour tout j, en utilisant (16.7)

$$\theta(\pi(z), z) \leq \theta(\varsigma_{j,k}, z)^2 \ll \theta(\pi(z), z)^2 + |\pi(z) - \varsigma_{j,k}|^4$$

donc

$$\theta(\pi(z), z) \ll \theta(\pi(z), z)^2 + |\pi(z) - \varsigma_{j,k}|^2$$

et donc, d'après (17.5)

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll O(1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + |\pi(z) - \varsigma_{j,k}|^2}$$

on a alors comme dans le deuxième cas de la preuve de la Proposition 9 de [**7**]

$$\operatorname{Re}\gamma(z) \ll O(1) + \log\frac{1}{d(\pi(z), E)} \ll O(1) + \log\frac{1}{\delta(z, K)}$$

car on a, pour tout z de $\overline{D}$, $d(\pi(z), E) \geq \delta(z, K)$.

18. THÉORÈME. *Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^∞ et p un point de ∂D. Soit (ω, h) une carte de Darboux au voisinage de p dans $\mathbf{C}^n$ et $\gamma\colon]-1,1[\to Z(]-1,1[^{2n})$ une courbe de classe C^∞ vérifiant $\gamma(0) = 0$ telle que, si on note $M = \{(x, \varsigma, r);\ x \in]-1,1[^{n-1}, \varsigma \in \gamma(]-1,1[), r = 0\}$, M vérifie la propriété suivante:*

(18.1) *l'espace tangent à M n'est pas dans le noyau de la forme de contact $dt - \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i$.*

Soit K un sous-ensemble compact de M tel que, si on note E la projection $Z(K)$ de K sur $\gamma(]-b, b[)$, on ait

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)d\varepsilon \ll r\left(\log\frac{1}{r} + O(1)\right) \tag{18.2}$$

pour tout r, $0 < r < 1$, et toute boule euclidienne B_r de rayon r centrée sur E. Alors $h^{-1}(K)$ a la propriété de division par $A^\infty(D)$.

PREUVE. Soit $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille de fonctions de $C^\infty_{h^{-1}(K)}$. On lui applique le Lemme 14 de division dans $C^\infty(\overline{D})$; il existe donc une fonction g de $C^\infty_{h^{-1}(K)}$ positive et ne s'annulant que sur $h^{-1}(K)$ et des fonctions $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $C^\infty_{h^{-1}(K)}$ telles que l'on ait, pour tout i de $\mathbf{N}$, $f_i = gh_i$. On peut supposer $\sup_{f\in\overline{D}} g(z) \leq 1/2$.

On pose $f = g \circ h^{-1}$; f est une fonction de C^∞_K, positive et ne s'annulant que sur K. On peut donc lui appliquer le Lemme 3; il existe une fonction s de C^∞_K vérifiant les conclusions du Lemme 3 et en particulier, pour tout (p, x) de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}^{2n}$

$$f(x) \leq C(p)s(x)^p. \tag{3.5}$$

On déduit, de là, que pour tout (p, z) de $\mathbf{N} \times \overline{D}$, on a

$$g(z) \leq C'(p)\delta(z, K)^p, \tag{18.3}$$

où $\delta(z, k)$ est définie à partir de s par (8.1).

C'est cette fonction s particulière qui sert également à définir la fonction H dont l'existence est assurée par le Lemme 5 et c'est à partir de la fonction H ainsi obtenue que l'on définit la fonction ψ holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\overline{D}\backslash E$ qui vérifie les conclusions de la Proposition 17 en particulier

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \log\frac{1}{\delta(z, K)} + O(1) \quad \text{pour tout } z \text{ de } \overline{D}\backslash h^{-1}(K). \tag{17.3}$$

De (18.3), on déduit que si on pose $\theta = \log 1/g$, il existe une fonction $\omega(t)$ tendant vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 telle que l'on ait

$$(18.4) \qquad \theta(z) \geq \omega[\delta(z \cdot K)] \log \frac{1}{\delta(z,K)} \quad \text{pour tout } z \text{ de } \overline{D} \backslash h^{-1}(K).$$

On poursuit alors cette preuve comme celle du Théorème 12 de [**7**] et on conclut qu'il existe une fonction F de $A^\infty(D)$ plate sur $h^{-1}(K)$ et ne s'annulant que sur $h^{-1}(K)$, vérifiant $g \leq |F|$ sur $\overline{D}\backslash h^{-1}(K)$. Il existe donc, toujours d'après le Lemme 14, des fonctions k_i de $C^\infty_{h^{-1}(K)}$ telles que l'on ait, pour tout i de $\mathbf{N}$, $f_i = Fk_i$. On vérifie, ici aussi, que, pour tout i, k_i appartient à l'adhérence dans $C^\infty(\overline{D})$ de $A^\infty(D) \cdot f_i$.

19. COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du Théorème* 18, $h^{-1}(K)$ *est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour* $A^\infty(D)$.

PREUVE. Il s'agit là d'une conséquence de la Proposition 12 et du Théorème 18.

20. REMARQUE. L'hypothèse 18.2 du Théorème 18 est évidemment vérifiée par un compact K dont la projection est réduite à un point.

21. COROLLAIRE. *Soit A un sous-ensemble fermé de ∂D localement inclus dans une sous-variété ∂D, de classe C^∞, intégrale de la structure de contact sur ∂D, c'est-à-dire, tel que, pour chaque point p de A, il existe un voisinage ouvert ω de p et N une sous-variété de $\partial D \cap \omega$, intégrale de la structure de contact sur ∂D contenant $A \cap \omega$. Alors A vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

PREUVE. On peut écrire $A = \cup_{i=1}^k A_i$, où, pour chaque i, $i = 1, \ldots, k$, il existe une carte de Darboux (ω_i, h_i) telle que l'on ait

$$A_i \subset h_i^{-1}\{(x,0),\ x \in]-1,1[^n\}.$$

Alors, de la Remarque 20 et du Théorème 18 on déduit que, pour tout i, $i = 1, \ldots, k$, A_i a la propriété de division par $A^\infty(D)$ et on conclut à l'aide de la Proposition 13.

22. DÉFINITION. On dit qu'un sous-ensemble fermé A de ∂D est un ensemble pic pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction f de $A^\infty(D)$ telle que l'on ait $f = 1$ sur A et $|f| < 1$ sur $\overline{D}\backslash A$.

On rappelle [**5**] qu'un ensemble pic pour $A^\infty(D)$ vérifie les hypothèses du Corollaire 21.

23. COROLLAIRE. *Une réunion finie d'ensembles pics pour $A^\infty(D)$ a la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

Ceci généralise un résultat de J. Bruna et J. M. Ortega [**2**].

Dimension de Hausdorff. On note $\mathcal{H}(E)$ la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble compact E de $\mathbf{R}$.

24. LEMME. *Il existe un compact E de $[0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes*

(a) $\mathcal{H}(E) = 1$,

(b) *Il existe des constantes C et C' telles que, pour tout intervalle I de longueur $|I| < 1$, on ait*

$$\int_0^{|I|} N_\varepsilon(E \cap I) d\varepsilon \leq C|I| + C'|I| \log \frac{1}{|I|}.$$

PREUVE. Soit ξ un réel, $0 < \xi < \frac{1}{2}$. On considére l'ensemble de Cantor $E(\xi)$ construit sur $[0,1]$ et de rapport de dissection ξ. On sait [**10**] que l'on a

$$E(\xi) = \bigcap_{n=0}^{\infty} E(n,\xi), \tag{24.1}$$

où $E(n,\xi)$ est formé de 2^n intervalles fermés disjoints $E(k,n,\xi)$ de longueur ξ^n,

$$\mathcal{H}[E(\xi)] = -\log 2/\log \xi. \tag{24.2}$$

On vérifie alors l'inégalité

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-2\xi} \leq \int_0^1 N_\varepsilon(E_\xi)d\varepsilon \leq \frac{2}{1-2\xi}. \tag{24.3}$$

Soient a et b deux réels, $a > 0$, on note

$$aE(\xi) + b = \{ax + b; x \in E(\xi)\}; \tag{24.4}$$

on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$N_{a\varepsilon}(aE(\xi) + b) = N_\varepsilon(E(\xi)). \tag{24.5}$$

Soit I un intervalle de $[0,1]$ de longueur $r < 1$ et n un entier positif ou nul tel que l'on ait $\xi^{n+1} \leq r < \xi^n$. On a

$$I \cap E(\xi) \subset E(k_1,n,\xi) \cup E(k_2,n,\xi)$$

pour k_1 et k_2 convenables dans $[0, 2^n - 1] \cap \mathbf{N}$.

Du procédé de construction de $E(\xi)$, on déduit

$$I \cap E(\xi) \subset \bigcup_{i=1}^{4} E(k_i', n+1, \xi), \qquad k_i' \in [0, 2^{n+1} - 1] \cap \mathbf{N},$$

et donc, en utilisant la propriété d'homogénéité de $E(\xi)$ et (24.4),

$$I \cap E(\xi) \subset \bigcup_{i=1}^{4} \xi^{n+1}E(\xi) + b_i \tag{24.6}$$

où les b_i, $i = 1, \dots, 4$, sont des réels convenables.

Pour tout ε, $0 < \varepsilon < r$, on a d'après (24.5) et (24.6)

$$N_\varepsilon(I \cap E(\xi)) \leq \sum_{i=1}^{4} N_\varepsilon(\xi^{n+1}E(\xi) + b_i) \leq 4N_{\varepsilon/\xi^{n+1}}(E(\xi)).$$

De là, en utilisant la décroissance de la fonction $\varepsilon \to N_\varepsilon(E)$, on obtient, pour tout ξ, $0 < \xi < \frac{1}{2}$, pour tout intervalle I de longueur $r < 1$ et tout ε, $0 < \varepsilon < r$,

$$N_\varepsilon(I \cap E(\xi)) \leq 4N_{\varepsilon/r}(E(\xi)). \tag{24.7}$$

Soit maintenant $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de nombres réels positifs convergeant vers $\frac{1}{2}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0 et vérifiant $a_0 = 1$. On note $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_n E(\xi_n)$. On a, pour tout n,

$$\mathcal{H}(E) \geq \mathcal{H}(a_n E(\xi_n)) = \mathcal{H}(E(\xi_n)) = -\log 2/\log \xi_n$$

et donc $\mathcal{H}(E) = 1$. Ceci établit (a).

Pour prouver (b), on remarque que, pour tout intervalle I de longueur $r < 1$ et tout ε, $0 < \varepsilon < r$, on a

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(I \cap E) &\leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_\varepsilon(I \cap a_n E(\xi_n)) + \sum_{a_n > r} N_\varepsilon(I \cap a_n E(\xi_n)) \\ &\leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_\varepsilon(a_n E(\xi_n)) + \sum_{a_n > r} N_\varepsilon[a_n(I_n \cap E(\xi_n))] \end{aligned}$$

où, pour chaque n, I_n est un intervalle convenable de longueur r/a_n. On a, d'après (24.5),

$$N_\varepsilon(I \cap E) \leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_{\varepsilon/a_n}(E(\xi_n)) + \sum_{a_n > r} N_{\varepsilon/a_n}(I_n \cap E(\xi_n)).$$

D'après (24.7) appliqué aux intervalles I_n de longueur $r/a_n < 1$, on déduit

$$N_\varepsilon(I \cap E) \leq 1 + \sum_{\varepsilon < a_n \leq r} N_{\varepsilon/a_n}(E(\xi_n)) + 4 \sum_{a_n > r} N_{\varepsilon/r}(E(\xi_n))$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^r N_\varepsilon(I \cap E) d\varepsilon &\leq r + \sum_{a_n \leq r} \int_0^{a_n} N_{\varepsilon/a_n}(E(\xi_n)) d\varepsilon + 4 \sum_{a_n > r} \int_0^r N_{\varepsilon/r}(E(\xi_n)) d\varepsilon \\ &\leq r + \sum_{a_n \leq r} a_n \int_0^1 N_\varepsilon(E(\xi_n)) d\varepsilon + 4 \sum_{a_n > r} r \int_0^1 N_\varepsilon(E(\xi_n)) d\varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut d'après (24.3)

$$\int_0^r N_\varepsilon(I \cap E) d\varepsilon \leq r + 2 \sum_{a_n \leq r} \frac{a_n}{1 - 2\xi_n} + 8r \sum_{a_n > r} \frac{1}{1 - 2\xi_n}.$$

Si on choisit $a_n = e^{-n^2}$ et $\xi_n = (n+1)/2(n+2)$, on vérifie qu'il existe deux constantes C et C' telles que l'on ait

$$\int_0^r N_\varepsilon(I \cap E) d\varepsilon \leq Cr + C' r \log 1/r.$$

25. THÉORÈME. *Soit D un domaine borné de $\mathbf{C}^n$, à frontière ∂D de classe C^∞, il existe sur ∂D des ensembles de zéros et des ensembles d'interpolation pour $A^\infty(D)$ de dimension de Hausdorff n.*

PREUVE. Il s'agit là d'une conséquence des Théorèmes 10 et 18 et du Lemme 24.

REMARQUE. Les méthodes développées dans les deux premières parties de ce travail s'appliquent à $A(D)$, la classe des fonctions holomorphes dans D et continues dans $\overline{D}$. Dans ce cas en effet les sous-ensembles de zéros et d'interpolation sont les mêmes. On obtient l'analogue du Théorème 10 pour $A(D)$ en remplaçant la condition (10.1) par la condition: "pour tout ε, il existe un recouvrement fini de E par des boules euclidiennes centrées sur E dont la somme des rayons est inférieure à ε".

Ce résultat généralise le Théorème (3.1) de [**8**].

REFERENCES

1. V. I. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, "Mir", Moscou, 1976.
2. J. Bruna et J. M. Ortega, *Closed finitely generated ideals in algebras of holomorphic functions and smooth to the boundary in strictly pseudoconvex domains*, Analyse Complexe (Proc., Toulouse 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1094, Springer-Verlag, New York, pp. 20–28.
3. ——, Communication personnelle.
4. J. Chaumat et A. M. Chollet, *Ensembles pics pour $A^\infty(D)$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), 171–200.
5. ——, *Caractérisation et propriétés des ensembles localement pics de $A^\infty(D)$*, Duke. Math. J. **47** (1980), 763–787.
6. ——, *Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudo-convexes*, Ark. Mat. **24** (1968), 27–57.
7. ——, *Propriété des divisions par des fonctions de $A^\infty(D)$*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986).
8. T. Duchamps et E. L. Stout, *Maximum modulus sets*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **31** (1981), 37–69.
9. B. S. Henriksen, *A peak set of Hausdorff dimension $2n-1$ for the algebra $A(D)$ in the boundary of a domain D with C^∞-boundary in $\mathbf{C}^n$*, Math. Ann. **259** (1982), 271–277.
10. J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.
11. A. Sadullaev, *A boundary uniqueness theorem in $\mathbf{C}^n$*, Math. U.S.S.R.-Sb. **30** (1976), 501–514.
12. E. L. Stout, *Interpolation manifolds*, Recent Developments in Several Complex Variables, Proc. Conf., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1979, pp. 373–391.
13. J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, New York, 1972.
14. A. E. Tumanov, *A peak set for the disk algebra of metric dimension 2.5 in the three dimensional unit sphere*, Math. U.S.S.R.-Izv. **11** (1977), 353–359.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU (CNRS 9296), ANALYSE HARMONIQUE MATHÉMATIQUE (BAT. 425), 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE