

## UNE MINORATION DE LA NORME DE L'OPÉRATEUR DE CAUCHY SUR LES GRAPHES LIPSCHITZIENS

GUY DAVID

**ABSTRACT.** It was shown by T. Murai that the norm of the operator defined by the Cauchy kernel on the graph of a Lipschitz function  $A$  is less than  $C(1 + \|A'\|_\infty)^{1/2}$ . We use Garnett's example to show that this estimate is optimal.

**I. Introduction.** Soit  $A: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction lipschitzienne. On considère l'opérateur  $T_A$  défini par

$$T_A f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} [(x-y) + i(A(x) - A(y))]^{-1} f(y) dy$$

pour  $f$  assez régulière.

On sait depuis [CMM] que  $T_A$  s'étend en un opérateur borné sur  $L^2(\mathbf{R})$ , et T. Murai a montré dans [M] que la norme de  $T_A$  sur  $L^2(\mathbf{R})$  est inférieure à  $C(1 + \|A'\|_\infty)^{1/2}$ . Le but de cet article est de prouver que cette estimation est la meilleure possible.

**THÉORÈME.** *Pour tout  $M > 0$  assez grand, il existe une fonction lipschitzienne  $A$  telle que  $\|A'\|_\infty \leq M$  et  $\|T_A\|_{L^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})} \geq M^{1/2}/10$ .*

**REMARQUE.** On peut aussi s'intéresser à une version légèrement différente de l'opérateur de Cauchy. On se donne un paramétrage  $s \rightarrow w(s)$  du graphe de  $A$  par la longueur d'arc, et on considère l'opérateur  $\mathcal{C}_A$  défini par

$$\mathcal{C}_A f(s) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|s-t|>\varepsilon} [w(s) - w(t)]^{-1} f(t) dt.$$

L'opérateur  $\mathcal{C}_A$  diffère de  $T_A$  seulement par le changement de variable qui transforme  $x$  en  $s$ . Le résultat de Murai entraîne que  $\|\mathcal{C}_A\|_{L^2, L^2} \leq C(1 + \|A'\|_\infty)^{3/2}$ . D'autre part, la fonction  $A$  que nous allons construire est telle que  $M/2 \leq |A'(x)| \leq M$  pour presque tout  $x$ , ce qui montre que la dérivée du changement de variable  $x \rightarrow s$  est comprise entre  $(1 + M^2/4)^{1/2}$  et  $(1 + M^2)^{1/2}$ . Par conséquent, la norme de  $\mathcal{C}_A$  pour notre exemple est supérieure à  $M^{3/2}/40$ .

L'idée de la démonstration est d'utiliser (comme P. Jones l'a suggéré à l'auteur) l'ensemble de Cantor du plan complexe connu sous le nom d'"exemple de Garnett" [G, I]. Cet ensemble est le produit cartésien  $G = K \times K$ , où  $K$  est l'ensemble de Cantor contenu dans  $[0, 1]$  défini par  $K = \bigcap_n E_n$ , où  $E_0 = [0, 1]$ ,  $E_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1], \dots$  et où  $E_{n+1}$  est obtenu à partir de  $E_n$  en retirant, de chacun des  $2^n$

---

Received by the editors August 1, 1986.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 42B20, 30C85.

*Key words and phrases.* Lipschitz graph, Cauchy integral, Calderón-Zygmund operators.

intervalles de longueur  $4^{-n}$  qui composent  $E_n$ , l'intervalle de longueur  $\frac{1}{2}4^{-n}$  situé en son centre. On constate (voir la figure) que  $G$  est, à une rotation près, le graphe d'une fonction  $F$ . La fonction  $A$  que nous construirons est une approximation  $M$ -lipschitzienne de cette fonction  $F$ , et nous estimerons dans la suite la vitesse avec laquelle la norme de  $T_A$  augmente quand  $M$  devient grand, c.à.d. quand  $A$  se rapproche de  $F$ .

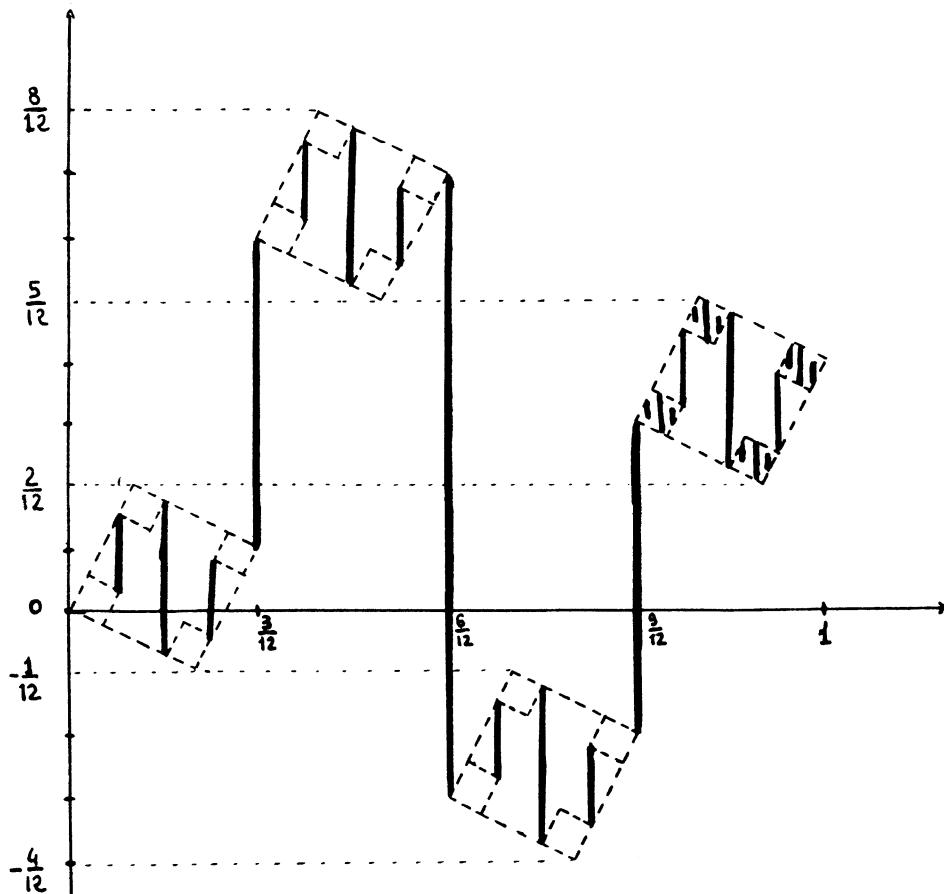


FIGURE. Graphe de  $A$  pour  $\varepsilon$  très petit (en traits pleins)

Nous donnerons au §II la définition précise de  $A$  et l'essentiel de la démonstration du théorème, en réservant pour le §III les calculs ennuyeux.

**II. Définition de  $A$ .** Pour simplifier les calculs, nous avons contracté un peu le graphe de  $F$ . La fonction  $A$  dépend du paramètre  $\varepsilon = 10/4M$ , et est définie par les conditions suivantes (voir la figure).

$$(1) \quad \begin{cases} A\left(\frac{3}{12}\right) = \frac{1}{12}, & A\left(\frac{3+4\varepsilon}{12}\right) = \frac{6}{12}, \\ A\left(\frac{6+4\varepsilon}{12}\right) = \frac{7}{12}, & A\left(\frac{6+8\varepsilon}{12}\right) = \frac{-3}{12}, \\ A\left(\frac{9+8\varepsilon}{12}\right) = \frac{-2}{12}, & A\left(\frac{9+12\varepsilon}{12}\right) = \frac{3}{12}; \end{cases}$$

(2)  $A$  est affine sur les segments

$$\left[ \frac{3}{12}, \frac{3+4\epsilon}{12} \right], \quad \left[ \frac{6+4\epsilon}{12}, \frac{6+8\epsilon}{12} \right] \quad \text{et} \quad \left[ \frac{9+8\epsilon}{12}, \frac{9+12\epsilon}{12} \right];$$

(3)  $A$  est continue, et satisfait aux relations de récurrence suivantes: si  $\rho = 1/4(1+\epsilon)$ , alors

$$A(x) = \begin{cases} \rho A(\frac{x}{\rho}) & \text{pour } x \in I_0^1 = [0, \frac{3}{12}], \\ \rho A(\frac{x}{\rho} - \frac{3+4\epsilon}{12\rho}) + \frac{6}{12} & \text{pour } x \in I_1^1 = [\frac{3+4\epsilon}{12}, \frac{6+4\epsilon}{12}], \\ \rho A(\frac{x}{\rho} - \frac{6+8\epsilon}{12\rho}) - \frac{3}{12} & \text{pour } x \in I_2^1 = [\frac{6+8\epsilon}{12}, \frac{9+8\epsilon}{12}], \\ \rho A(\frac{x}{\rho} - \frac{9+12\epsilon}{12\rho}) + \frac{3}{12} & \text{pour } x \in I_3^1 = [\frac{9+12\epsilon}{12}, 1+\epsilon]. \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces conditions définissent une fonction  $A$  (celle de la figure), et que  $A$  est lipschitzienne avec

$$(4) \quad -10/4\epsilon \leq A'(x) \leq 5/4\epsilon,$$

avec, en fait, égalité d'un des deux côtés presque-partout.

Nous voulons prouver que la norme de  $T_A$  sur  $L^2$  est supérieure à  $M^{1/2}/10$ . Il suffira de montrer que l'image par  $T_A$  de la fonction caractéristique de  $[0, 1+\epsilon]$  a une norme  $\geq ((1+\epsilon)/40\epsilon)^{1/2}$  dans  $L^2([0, 1+\epsilon])$ .

Nous avons besoin de quelques notations. Soit

$$f(x) = \mathbf{1}_I(x) \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{dy}{x-y + i(A(x) - A(y))}.$$

On note  $I_0^0 = I$ , les  $I_k^1$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , sont comme ci-dessus, et  $J_0^0$  est le complémentaire dans  $I_0^0$  de l'union des  $I_k^1$  (par conséquent,  $J_0^0$  est composé de trois petits intervalles ouverts).

Les  $I_k^l$  sont  $4^l$  intervalles de même longueur  $(1+\epsilon)\rho^l$  définis par récurrence de la manière suivante: ce sont les images inverses des  $I_{k'}^{l-1}$  ( $0 \leq k' \leq 4^{l-1}-1$ ) par l'une des transformations  $x \rightarrow x/\rho - j(3+4\epsilon)/\rho$ , où  $j = 0, 1, 2, 3$ . On numérote les  $I_k^l$  de gauche à droite (c.à.d. que  $I_k^l$  est le  $(k+1)$ ième de ces intervalles à partir de la gauche). Pour tenter d'éclaircir un peu les notations, disons que les  $I_k^l$  correspondent aux  $4^l$  carrés de l'ensemble  $E_l \times E_l$  défini plus haut.

Pour  $l \geq 1$  et  $0 \leq k \leq 4^l-1$ ,  $J_k^l$  est le complémentaire dans  $I_k^l$  de l'union des  $I_{k'}^{l+1}$  qui sont contenus dans  $I_k^l$  (cela correspond aux indices  $k' \in [4k, 4k+3]$ ).  $J_k^l$  est donc la réunion de trois petits intervalles ouverts.

Enfin, on notera  $\tilde{k}$  la partie entière de  $k/4$ .

Nous allons décomposer la fonction  $f$  en de nombreux termes. Pour  $l \geq 1$ , on définit les trois fonctions  $f_l, g_l, h_l$  par les relations suivantes.

$$(5) \quad f_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'est dans aucun } I_k^l, \\ \sum_{\substack{k' \neq \tilde{k} \\ \tilde{k}'=\tilde{k}}} \int_{I_{k'}^l} \frac{dy}{z(x) - z(y)} & \text{si } x \in I_k^l, \end{cases}$$

où l'on a noté  $z(x) = x + iA(x)$ . La fonction  $f_l$  est donc, pour  $x \in I_k^l$ , la partie de  $T_A(1)$  qui provient des carrés dont la distance à  $z(x)$  est de l'ordre de  $4^{-l}$ .

$$(6) \quad g_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'est dans aucun des } I_k^l, \\ \int_{J_k^{l-1}} \frac{dy}{z(x) - z(y)} & \text{si } x \in I_k^l; \end{cases}$$

$$(7) \quad h_l(x) = \begin{cases} \int_{I_k^{l-1}} \frac{dy}{z(x) - z(y)} & \text{si } x \in J_k^{l-1}, \\ 0 & \text{si } x \text{ n'est dans aucun des } J_k^{l-1}. \end{cases}$$

Pour minorer la norme de  $f$ , on remarque que  $f = \sum_{l=1}^{\infty} (f_l + g_l + h_l)$ , et on veut calculer les produits scalaires entre toutes ces fonctions. Notre but est de montrer que les produits  $\langle f_l, f_l \rangle$  sont grands et positifs, alors que tous les autres produits sont petits. Le lemme suivant utilise le fait que le graphe de  $A$  est presque invariant par certaines dilatations et translations. Il nous permettra de réduire considérablement le nombre de termes à calculer.

**LEMMA 1.** *Soient  $l \geq 1$  et  $m \geq 0$ . La formule qui suit est valable quand on remplace la lettre  $u$  par l'une des lettres  $f, g$ , ou  $h$  et la lettre  $v$  par l'une des lettres  $f, g$ , ou  $h$ :*

$$(8) \quad \langle u_{1+m}, v_{l+m} \rangle = 4^m \rho^m \langle u_1, v_l \rangle.$$

Démontrons par exemple que  $\langle f_{1+m}, f_{l+m} \rangle = 4^m \rho^m \langle f_1, f_l \rangle$ . On écrit

$$\langle f_{1+m}, f_{l+m} \rangle = \sum_{k=0}^{4^m-1} \int_{I_k^m} f_{1+m}(x) \overline{f_{l+m}(x)} dx.$$

Fixons  $k \in [0, 4^m - 1]$  et  $x \in I_k^m$ . On écrit  $k = 4\tilde{k} + k'$  ( $0 \leq k' \leq 3$ ) et l'on note  $a$  l'extrémité initiale de  $I_k^l$ . Alors

$$\begin{aligned} f_{1+m}(x) &= \sum_{\substack{0 \leq k'' \leq 3 \\ k'' \neq k'}} \int_{I_{4\tilde{k}+k''}^{1+m}} \frac{dy}{z(x) - z(y)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k'' \leq 3 \\ k'' \neq k'}} \int_{I_{4\tilde{k}+k''}^{1+m}} \frac{dy}{\rho^m z((x-a)/\rho^m) - \rho^m z((y-a)/\rho^m)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k'' \leq 3 \\ k'' \neq k'}} \int_{I_{k''}^1} \frac{du}{z((x-a)/\rho^m) - z(u)} = f_1 \left( \frac{x-a}{\rho^m} \right). \end{aligned}$$

De même,  $f_{l+m}(x) = f_l((x-a)/\rho^m)$ . On en déduit aussitôt que

$$\begin{aligned} \langle f_{1+m}, f_{l+m} \rangle &= \sum_{k=0}^{4^m-1} \int_{I_k^m} f_1 \left( \frac{x-a}{\rho^m} \right) \overline{f_l \left( \frac{x-a}{\rho^m} \right)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{4^m-1} \int_I f_1(x) \overline{f_l(x)} \rho^m dx = 4^m \rho^m \langle f_1, f_l \rangle. \end{aligned}$$

La démonstration des autres égalités (8) est semblable.

Le lemme suivant est un résumé des majorations dont on aura besoin pour conclure.

**LEMME 2.** *Posons  $\beta = \|f_1\|_2^2$ . Alors, si  $\varepsilon$  est assez petit,*

$$(9) \quad |\langle f_1, f_2 \rangle| \leq 23\beta/100;$$

$$(10) \quad |\langle f_1, f_{1+k} \rangle| \leq (24/10)4^{-k}\beta \quad \text{pour } k \geq 2;$$

$$(11) \quad |\langle f_1, g_k + h_k \rangle| + |\langle f_k, g_1 + h_1 \rangle| \leq 3^{-k}10^{-3}\beta;$$

$$(12) \quad \beta \geq \frac{1}{2}.$$

Nous gardons la démonstration du lemme pour le prochain paragraphe. L'idée est que l'intégrale de  $f_{1+k}$  (ou  $g_k$ , ou  $h_k$ ) sur  $I_j^k$  est nulle, alors que  $f_1$  (ou  $g_1$ ) varie assez peu sur cet intervalle. Les fonctions  $f_{1+k}$  et  $f_1$  sont donc presque orthogonales (ce qui explique (10) et (11) lorsque  $k$  est grand); le reste n'est qu'une question de calculs.

Montrons maintenant comment le Lemme 2 permet de démontrer le théorème.

Puisque  $f = \sum_{l=1}^{\infty} (f_l + g_l + h_l)$ ,

$$(13) \quad \|f\|_2^2 = \left\| \sum_l f_l \right\|_2^2 + \left\| \sum_l (g_l + h_l) \right\|_2^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle f_l, g_m + h_m \rangle.$$

Commençons par minorer le premier terme:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=1}^{\infty} f_l \right\|_2^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\|_2^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_l, f_{l+k} \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 4^m \rho^m \|f_1\|_2^2 + 2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} 4^m \rho^m \right) \left( \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_1, f_{1+k} \rangle \right) \\ &\geq \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-m} \right\} \left\{ \beta - 2|\langle f_1, f_2 \rangle| - 2 \sum_{k=2}^{\infty} |\langle f_1, f_{1+k} \rangle| \right\} \\ &\geq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \beta \left( 1 - \frac{46}{100} - \frac{48}{10} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) \right), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(14) \quad \left\| \sum_{l=1}^{\infty} f_l \right\|_2^2 \geq \frac{14}{100} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \beta.$$

Le second terme est positif, donc il ne reste plus qu'à s'occuper du troisième.

$$\begin{aligned}
& \left| 2\operatorname{Re} \sum_l \sum_m \langle f_l, g_m + h_m \rangle \right| \\
& \leq 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f_l, g_{l+k} + h_{l+k} \rangle| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_{m+k}, g_m + h_m \rangle| \\
& \leq 2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-j} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f_1, g_{1+k} + h_{1+k} \rangle| \right) \\
& \quad + 2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-j} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_{1+k}, g_1 + h_1 \rangle| \right) \\
& \leq \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (|\langle f_1, g_{1+k} + h_{1+k} \rangle| + |\langle f_{1+k}, g_1 + h_1 \rangle|) \\
& \leq \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \right) 10^{-3} \beta = \frac{3(1+\varepsilon)}{\varepsilon} 10^{-3} \beta.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (13) et de (14),

$$\|f\|_2^2 \geq \frac{13(1+\varepsilon)}{100\varepsilon} > \frac{1+\varepsilon}{40\varepsilon},$$

ce qui démontre le théorème.

**III. Démonstration du Lemme 2.** Nous avons encore besoin de quelques notations. Pour chaque  $I_k^l$ , on appelle  $Q_k^l$  le carré dont l'une des diagonales est le segment  $[a_k^l + iA(a_k^l), b_k^l + iA(b_k^l)]$ , où  $a_k^l$  et  $b_k^l$  sont les extrémités de  $I_k^l$ .

LEMMA 3. *La fonction*

$$u(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{I_k^1} \frac{dy}{z - z(y)}$$

est définie et analytique sur  $Q_0^1$ . Sa dérivée satisfait à

$$(15) \quad |u'(z)| \leq 34/10 \quad \text{sur } Q_0^1.$$

Pour démontrer cela, on écrit

$$u'(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{I_k^1} \frac{-dy}{(z - z(y))^2},$$

et l'on majore  $|u'(z)|$  par

$$\sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \left[ \operatorname{dist} \left( \frac{3+i}{12}, Q_k^2 \right) \right]^{-2} dy \leq \frac{1}{16} \sum_{k=4}^{15} \left[ \operatorname{dist} \left( \frac{3+i}{12}, Q_k^2 \right) \right]^{-2}.$$

On fait le calcul et on obtient  $|u'(z)| \leq 34/10$ .

Pour  $k = 0, \dots, 15$ , soit  $z_k$  le centre de  $Q_k^2$ . Nous voulons calculer avec une certaine précision les valeurs de  $u(z)$  aux points  $z_0, z_1, z_2$  et  $z_3$ . Commençons par

remplacer, dans l'intégrale  $\int_{I_k^2} dy/(z_l - z(y))$ , le point  $z(y)$  par la constante  $z_k$ . Cela donne

$$\tilde{u}(z_l) = \frac{1}{16} \sum_{k=4}^{15} \frac{1}{z_l - z_k}.$$

On peut maintenant calculer  $\tilde{u}(z_l)$  pour  $l = 0, 1, 2, 3$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit, le calcul donne

$$(16) \quad \frac{850}{1000} < -\operatorname{Re} \tilde{u}(z_0) < \frac{853}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{283}{1000} < \operatorname{Im} \tilde{u}(z_0) < \frac{285}{1000};$$

$$(17) \quad \frac{924}{1000} < -\operatorname{Re} \tilde{u}(z_1) < \frac{929}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{261}{1000} < \operatorname{Im} \tilde{u}(z_1) < \frac{265}{1000};$$

$$(18) \quad \frac{918}{1000} < -\operatorname{Re} \tilde{u}(z_3) < \frac{919}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{306}{1000} < \operatorname{Im} \tilde{u}(z_3) < \frac{307}{1000}.$$

Nous n'avons pas besoin de calculer  $\tilde{u}(z_2)$  car nous pouvons l'obtenir par symétrie. La différence  $u(z_l) - \tilde{u}(z_l)$  est facilement majorée:

$$\begin{aligned} u(z_l) - \tilde{u}(z_l) &= \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \left[ \frac{1}{z_l - z(y)} - \frac{1}{z_l - z_k} \right] dy + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \frac{z(y) - z_k}{(z_l - z(y))(z_l - z_k)} dy + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \frac{z(y) - z_k}{(z_l - z_k)^2} dy + \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \frac{(z(y) - z_k)^2}{(z_l - z_k)^2(z_l - z(y))} dy + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Notons que la partie du graphe  $A$  qui se trouve dans  $Q_l^2$  est symétrique par rapport au centre  $z_k$ , de sorte que les 12 premières intégrales sont nulles, et que

$$\begin{aligned} |u(z_l) - \tilde{u}(z_l)| &\leq \sum_{k=4}^{15} \frac{1}{16} \left[ \sup_{y \in I_k^2} |z(y) - z_k|^2 \right] \frac{1}{|z_l - z_k|^2} \frac{1}{\operatorname{dist}(z_l, Q_k^2)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &\leq \frac{12}{16} \left[ \frac{1}{16^2} \frac{10}{36} \right] \frac{16^2}{45} 3 = \frac{1}{64} < \frac{16}{1000} \end{aligned}$$

dès que  $\varepsilon$  est assez petit.

Enfin, on déduit du Lemme 3 que si  $z \in Q_l^2$ , alors

$$|u(z) - u(z_l)| \leq \frac{34}{10} |z - z_l| \leq \frac{34}{10} \frac{1}{16} \left( \frac{10}{36} \right)^{1/2} < \frac{114}{1000}.$$

Par conséquent, si  $z \in Q_l^2$ ,

$$(19) \quad |u(z) - \tilde{u}(z_l)| < 13/100.$$

Les estimations suivantes sont des conséquences faciles de (16), (17), (18) et (19);

$$(20) \quad \inf_{x \in I_l^2} |f_1(x)| \geq 76/100,$$

$$(21) \quad \|f_1\|_\infty \leq 115/100.$$

Notons que, bien que nous n'ayons prouvé ces inégalités que pour  $0 \leq l \leq 3$ , elles restent vraies par le même argument (ou par symétrie) pour  $4 \leq l \leq 15$ . De même, (20) et (21) restent vraies quand  $f_1$  est remplacé par  $f_2$  et  $I_l^2$  par  $I_l^3$ .

On déduit de (20) que  $\beta = \|f_1\|_2^2 \geq \frac{1}{2}$  dès que  $\varepsilon$  est assez petit.

On déduit de (17), (18) et (19) que

$$(22) \quad |\tilde{u}(z_0) - \tilde{u}(z_3)| \leq \frac{73}{1000} \quad \text{et} \quad |\tilde{u}(z_1) - \tilde{u}(z_2)| \leq \frac{85}{1000}.$$

Montrons que, pour  $x \in I_0^1$  et  $\tilde{x} = 3/12 - x$ ,

$$(23) \quad |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| \leq 345/1000.$$

En effet, si  $x \in I_0^2$ , alors

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| &= |u(z(x)) - u(z(\tilde{x}))| \\ &\leq |u(z(x)) - \tilde{u}(z_0)| + |u(z(\tilde{x})) - \tilde{u}(z_3)| + |\tilde{u}(z_0) - \tilde{u}(z_3)|. \end{aligned}$$

Par (19) et (22), ceci est inférieur à

$$2 \frac{130}{1000} + \frac{73}{1000} < \frac{345}{1000}.$$

De même, si  $x \in I_1^2$ ,

$$|f_1(x) - f_1(\tilde{x})| \leq |u(z(x)) - \tilde{u}(z_1)| + |u(z(\tilde{x})) - \tilde{u}(z_2)| + |\tilde{u}(z_1) - \tilde{u}(z_2)| \leq \frac{345}{1000}.$$

Enfin, le résultat pour  $x \in I_2^2$  ou  $x \in I_3^2$  s'en déduit par symétrie.

Démontrons maintenant l'inégalité (9). On écrit

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_I f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \sum_{j=0}^3 \int_{I_j^1} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx.$$

Regardons seulement le premier terme de la somme, les autres étant semblables. Notons que la partie du graphe de  $A$  qui se trouve dans  $Q_0^1$  est symétrique par rapport à son centre, ce qui signifie que, pour  $x \in I_0^1$ ,  $z(\tilde{x}) = 3/12 + i/12 - z(x)$ . On en déduit que  $f_2(\tilde{x}) = -f_2(x)$  pour  $x \in I_0^1$ , et

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_0^1} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{I_0^1} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx - \int_{I_0^1} f_1(x) \overline{f_2(\tilde{x})} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{I_0^1} |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| |f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{345}{1000} \int_{I_0^1} |f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{345}{1000} \left[ \frac{100}{76} \inf_{I_l^2} |f_2| \right] \int_{I_0^1} |f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{345}{1520} \int_{I_0^1} |f_2(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

En additionnant les quatre morceaux provenant des  $I_l^1$ , on obtient

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \frac{345}{1520} \beta < \frac{23}{100} \beta.$$

Passons à la démonstration de (10). A nouveau, on écrit

$$\langle f_1, f_{1+k} \rangle = \int_I f_1(x) \overline{f_{1+k}(x)} dx = \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} f_1(x) \overline{f_{1+k}(x)} dx.$$

Si  $x$  est dans  $I_j^k$ , et si  $\tilde{x}$  est le symétrique de  $x$  par rapport au centre de  $I_j^k$ ,  $f_{k+1}(\tilde{x}) = -f_{k+1}(x)$ , ce qui nous permet d'écrire

$$|\langle f_1, f_{1+k} \rangle| = \left| \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} \frac{1}{2} [f_1(x) - f_1(\tilde{x})] \overline{f_{k+1}(x)} dx \right|.$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| &\leq \frac{1}{2} \frac{34}{10} |x - \tilde{x}| \\ &\leq \frac{17}{10} 4^{-k} \frac{\sqrt{10}}{3} \left[ \inf_{I_i^{k+1}} |f_{k+1}| \right] \leq \frac{24}{10} 4^{-k} \inf_{I_i^{k+1}} |f_{k+1}|, \end{aligned}$$

on obtient

$$|\langle f_1, f_{k+1} \rangle| \leq \frac{24}{10} 4^{-k} \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} |f_{k+1}(x)|^2 dx \leq \frac{24}{10} 4^{-k} \beta.$$

Il nous faut encore démontrer (11). Comme  $\|g_1\|_2$  et  $\|h_1\|_2$  tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ , et que  $\|g_n\|_2 + \|h_n\|_2 \leq \|g_1\|_2 + \|h_1\|_2$ , il suffit de choisir  $\varepsilon$  assez petit pour que (11) soit vraie pour tout  $k \leq 100$ .

Soit maintenant  $k \geq 100$ , et supposons que  $\varepsilon$  est assez petit pour que  $\|h_1\|_2 + \|g_1\|_2 \leq 1$ . Soit  $M_1 = |\langle f_1, g_{k+1} \rangle|$ . Alors

$$M_1 \leq \sum_{j=0}^{4^k-1} \left| \int_{I_j^k} f_1(x) \overline{g_{k+1}(x)} dx \right|.$$

Comme le graphe de  $A$  est symétrique par rapport au point  $\frac{1}{2} + \frac{i}{6}$ , l'intégrale de la fonction  $g_1$  sur  $I_0^0$  est nulle. On en déduit que l'intégrale de  $g_{k+1}$  sur chaque  $I_j^k$  est encore nulle. Si  $x_j^k$  est le centre de  $I_j^k$ , on peut, sans changer l'intégrale, soustraire  $f_1(x_j^k)$  à  $f_1(x)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} |f_1(x) - f_1(x_j^k)| |g_{k+1}(x)| dx \\ &\leq \frac{34}{10} 4^{-k} \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} |g_{k+1}(x)| dx \\ &\leq \frac{34}{10} 4^{-k} \|g_{k+1}\|_2 \leq \frac{68}{10} 4^{-k} \beta. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $M_2 = |\langle f_1, h_{k+1} \rangle|$ . A nouveau, par symétrie, l'intégrale de  $h_{k+1}$  sur chaque  $I_j^k$  est nulle. Le même calcul donne

$$M_2 \leq \frac{34}{10} 4^{-k} \|h_{k+1}\|_2 \leq \frac{68}{10} 4^{-k} \beta.$$

Soit  $M_3 = |\langle g_1, f_{k+1} \rangle|$ . La fonction  $g_1$  est de la forme

$$g_1(x) = \sum_{m=1}^6 \alpha_m \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m))$$

sur le support de  $f_{k+1}$ , où les  $x_m$  sont les extrémités des intervalles composant  $J_0^0$ , et les  $\alpha_m$  sont des nombres complexes de module inférieur à 1. Alors,

$$M_3 \leq \sum_{m=1}^6 \sum_{j=0}^{4^k-1} \left| \int_{I_j^k} \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m)) \bar{f}_{k+1}(x) dx \right|.$$

Si la distance de  $x_m$  à  $I_j^k$  est inférieure à  $10\rho^k$ , on utilise la majoration

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_j^k} \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m)) \overline{f_{k+1}}(x) dx \right| \\ & \leq \|f_{k+1}\|_\infty \|\operatorname{Log}(z(x) - z(x_m))\|_{L^1(I_j^k)} \leq 10k\rho^k. \end{aligned}$$

Si la distance de  $x_m$  à  $I_j^k$  est supérieure à  $n\rho^k$  pour un  $n \geq 10$ , choisissons un point  $w$  dans  $I_j^k$  et remplaçons  $\operatorname{Log}(z(x) - z(x_m))$  par

$$\operatorname{Log}((z(x) - z(x_m))/(z(w) - z(x_m)))$$

dans l'intégrale, ce qui n'en change pas la valeur car l'intégrale de  $f_{k+1}$  sur  $I_j^k$  est nulle. On obtient

$$\left| \int_{I_j^k} \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m)) \overline{f_{k+1}}(x) dx \right| \leq \frac{\operatorname{diam}(I_j^k)}{n\rho^k} \int_{I_j^k} |f_{k+1}(x)| dx \leq \frac{3}{n} \rho^k.$$

Notons que pour chaque entier  $n \geq 10$ , il y a au plus deux intervalles  $I_j^k$  tels que la distance de  $x_m$  à  $I_j^k$  soit comprise entre  $n\rho^k$  et  $(n+1)\rho^k$ . On somme maintenant tous les termes, et on obtient

$$M_3 \leq \sum_{m=1}^6 \left\{ 200k\rho^k + 2 \sum_{n=10}^{\rho^{-k}} \frac{3}{n} \rho^k \right\} \leq 10^4 k 4^{-k}.$$

Enfin, puisque  $h_1$  et  $f_{k+1}$  ont des supports disjoints,  $M_4 = |\langle h_1, f_{k+1} \rangle| = 0$ , et (11) est obtenue en sommant nos majorations de  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [CMM] R. R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), 361–387.
- [G] J. Garnett, *Positive length but zero analytic capacity*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1970), 696–699.
- [M] T. Murai, *Boundedness of singular integral operators of Calderon type VI*, preprint series, College of General Education, Nagoya, no. 12, 1984.
- [I] L. D. Ivanov, *The local structure of sets with finite variation*, Mat. Sb. (N.S.) **78** (120)(1969), 85–100.