TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 332, Number 1, July 1992

L'ESPACE DES ARCS D'UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. We prove that, for any surface M, the space of arcs contained in M, with the topology induced by the Hausdorff distance, is homeomorphic to $M \times \Sigma^\infty$, where $\Sigma = \{(x_i) \in l^2 / \sum_{i=1}^\infty (ix_i)^2 < \infty\}$.

1. INTRODUCTION ET PRÉLIMINAIRES

Tous les espaces considérés ici sont supposés métriques séparables et munis d'une distance d fixée, mais arbitraire, sauf indication contraire. Nous noterons $C(X)$ l'espace des sous-continus de X muni de la topologie définie par la distance de Hausdorff associée à d; il est connu que la topologie ainsi obtenue sur $C(X)$ ne dépend pas du choix de d. Soit $a(X)$ le sous-ensemble de $C(X)$ formé des continus homéomorphes à un arc. S. B. Nadler Jr. a demandé [9, p. 606] si l'on pouvait trouver un modèle bien compris de $a(\mathbb{R}^2)$. Nous allons donner ici un tel modèle pour $a(M)$ quand M est une surface quelconque. Considérons le sous-espace suivant de l'espace de Hilbert l^2: $\Sigma = \{(x_i) \in l^2 / \sum_{i=1}^\infty (ix_i)^2 < \infty\}$; soit Σ^∞ le produit d'une infinité dénombrable de copies de Σ. Nous démontrerons le résultat suivant:

1.1. **Théorème.** *Pour toute surface M, avec ou sans bord, $a(M)$ est homéomorphe à $M \times \Sigma^\infty$.*

La démonstration utilise une caractérisation de Σ^∞ due à Bestvina et Mogilski, que nous rappellerons dans le §2.

La distance sur un espace métrique sera toujours notée d, et la distance de Hausdorff associée sur $C(X)$ sera toujours notée ρ. Si A et B sont des sous-ensembles de X, nous poserons $d(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b)$; si $A = \{x\}$, nous écrirons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$. Si C est un élément de $C(X)$ et K un sous-ensemble de $C(X)$, nous poserons $\rho(C, K) = \inf_{C'\in K} \rho(C, C')$. La boule ouverte (resp. fermée) decentre x et de rayon ε sera notée $B(x, \varepsilon)$ (resp. $\overline{B}(x, \varepsilon)$). Si $\varepsilon = 0$, $\overline{B}(x, \varepsilon) = \{x\}$. La boule ouverte de centre C et de rayon ε dans $C(X)$ sera notée $B_\rho(C, \varepsilon)$.

Si X et Y sont des espaces métriques, nous noterons $\mathscr{C}(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y avec la topologie compacte ouverte, laquelle coïncide, dans les cas particuliers utilisés ci-dessous, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X. Une fonction $f: X \to Y$ est appelée un plongement si c'est un homéomorphisme de X sur $f(X)$. Une

Received by the editors June 10, 1989 and, in revised form, March 29, 1990.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 54B20, 57N05, 57N20.

fonction $f\colon X \to Y$ est dite fermée au-dessus d'un sous-ensemble A de Y si, pur tout a dans A et tout voisinage U de $f^{-1}(a)$ dans X, il existe un voisinage V de a dans Y, tel que $f^{-1}(V) \subset U$ (cette définition implique que si un point de A n'est pas dans $f(X)$, il n'appartient pas à la fermeture de $f(X)$).

Nous noterons id_X, ou simplement id, l'identité de X. Nous noterons I l'intervalle $[0, 1]$. Une homotopie est une fonction continue $h\colon X \times I \to Y$. Pour une telle homotopie, nous noterons h_t la fonction $h_t(x) = h(x, t)$ de X dans Y.

Soit $\mathscr{U} = \{U_\alpha/\alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert d'un espace X. Pour tout sous-ensemble K de X, nous noterons $\mathrm{St}(K, \mathscr{U})$ la réunion des éléments de $\mathscr{U}$ rencontrant K, et nous poserons $\mathrm{St}(\mathscr{U}) = \{\mathrm{St}(U_\alpha, \mathscr{U})/\alpha \in A\}$. Si f et g sont deux fonctions de Y dans X, nous dirons que f est $\mathscr{U}$-proche de g si, pour tout y dans Y, il y a un élément de $\mathscr{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$.

Nous utiliserons des méthodes développées dans un article précédent [3], dont nous rappellerons quelques résultats. Nous regardons la sphère de Riemann, munie de sa structure conforme habituelle, tantôt comme le compactifié $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ du plan complexe, tantôt comme la sphère unité $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3/x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, les deux étant identifiés par projection stéréographique depuis le pôle nord $(0, 0, 1)$. Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$; pour $0 < t < 1$, posons $S(t) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = t\}$ $B(t) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < t\}$ et $\overline{B}(t) = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq t\}$. Notons S^1 le bord de D.

Soit $\mathrm{c.e.}(S^2)$ le sous-ensemble de $C(S^2)$ formé des continus cellulaires, et soit $\mathrm{c.e.}^*(S^2)$ le sous-ensemble de $\mathrm{c.e.}(S^2)$ formé des continus non dégénérés. Posons $\mathrm{c.e.}(D) = \mathrm{c.e.}(S^2) \cap C(D)$ et $\mathrm{c.e.}^*(D) = \mathrm{c.e.}^*(S^2) \cap C(D)$.

Fixons un point p_0 de $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$. Pour C dans $\mathrm{c.e.}^*(D)$, soit f_C l'unique représentation conforme de D sur $S^2\backslash C$ vérifiant $f_C(0) = p_0$ et $f_C'(0) > 0$ (voir [12, Théorème 1.3, p. 13]).

1.2. **Lemme.** *La fonction* $F\colon \mathrm{c.e.}^*(D) \to \mathscr{C}(D, S^2)$ *définie par* $F(C) = f_C$ *est continue.*

Ceci est prouvé au début de la démonstration du Lemme 3.2 de [3].

Soit $\mathrm{c.e.}_v(S^2)$ le sous-ensemble de $\mathrm{c.e.}(S^2)$ formé des continus non dégénérés dont l'intérieur est vide, et soit $\mathrm{c.e.}_v(D) = \mathrm{c.e.}_v(S^2) \cap \mathrm{c.e.}(D)$. Définissons une fonction $\Pi\colon \mathrm{c.e.}_v(D)\times]0, 1] \to C(S^2)$ par

$$\Pi(C, 1) = C, \qquad \Pi(C, t) = f_C(S(t)) \quad \text{si } 0 < t < 1.$$

1.3. **Lemme.** *La fonction* Π *est continue.*

C'est le Lemme 6.2 de [3].

2. Caractérisation de Σ^∞

Rappelons d'abord quelques définitions. Soit X un rétracte absolu de voisinage. Un sous-ensemble F de X est appelé un Z-ensemble dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathscr{U}$-proche de id_X, telle que $f(X) \subset X\backslash F$. F est un Z-ensemble au sens fort si, de plus, il est toujours possible de choisir la fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap F = \varnothing$. En général, ces deux notions diffèrent (voir [1]); cependant, lorsque X est une l^2-variété, tout Z-ensemble dans X est un Z-ensemble au sens fort [5]. Il est connu [2, Corollaire 1.2] qu'un fermé F d'un rétracte absolu de voisinage X est un Z-ensemble au sens fort si, et seulement si, il existe une homotopie $h\colon X \times I \to X$ vérifiant (i) $h_0 = \mathrm{id}$, (ii) $h_t(X) \subset X \backslash F$ pour tout $t > 0$, et (iii) h est fermée au-dessus de F; ceci s'applique donc à tout Z-ensemble d'une l^2-variété. Il est aussi connu que, si F est un Z-ensemble dans X et U un ouvert de X, $U \cap F$ est un Z-ensemble dans U. Une fonction $f\colon C \to X$ est appelée un Z-plongement si c'est un plongement et si $f(C)$ est un Z-ensemble dans X.

Nous noterons $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ la classe de tous les espaces métriques séparables qui sont des $F_{\sigma\delta}$ absolus. Un rétracte absolu de voisinage X est dit $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel si, pour tout espace C appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, toute fonction continue $f\colon C \to X$, et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe un Z-plongement $g\colon C \to X$ qui est $\mathscr{U}$-proche de f; X est dit fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel si, pour tout espace C appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, tout fermé E de C, toute fonction continue $f\colon C \to X$ dont la restriction à E est un Z-plongement, et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe un Z-plongement $g\colon C \to X$ que est $\mathscr{U}$-proche de f et vérifie $g|E = f|E$.

2.1. **Lemme.** *Un rétracte absolu X appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ est homéomorphe à Σ^∞ si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes:*

(C.1) *X est fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel,*

(C.2) *$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, où chaque X_n est un Z-ensemble au sens fort dans X.*

Ceci est un cas particulier du Théorème 6.5 de [2] (la discussion, pp. 310–311 de [2], montre que Σ^∞ est homéomorphe à l'espace noté Ω_2 dans [2]).

Les conditions (C.1) et (C.2) peuvent être simplifiées lorsque, comme ce sera le cas ici, X peut être plongé dans un espace L de façon que le couple (L, X) vérifie l'hypothèse suivante:

(H) L est homéomorphe à l^2 et il existe une homotopie $h\colon L \times I \to L$

vérifiant (i) $h_0 = \mathrm{id}$ et (ii) $h_t(L) \subset X$ pour $t > 0$.

2.2. **Lemme.** *Sous l'hypothèse* (H), *tout Z-ensemble dans X est un Z-ensemble au sens fort dans X.*

C'est une conséquence de la Proposition 1.7 de [2].

2.3. **Lemme.** *Sous l'hypothèse* (H), *la condition* (C.1) *résulte de la suivante:*

(C.1′) *Pour tout sous-ensemble ouvert U de L, tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de U et tout sous-ensemble F de U de type $F_{\sigma\delta}$, il existe un Z-plongement g de U dans U vérifiant* (i) *g est $\mathscr{U}$-proche de* id_U, *et* (ii) $g(U) \cap X = g(F)$.

Démonstration. Compte tenu du lemme précédent et de la Proposition 2.2 de [2], il suffit de montrer que tout ouvert U de X est $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel. Soient C un espace appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, f une fonction continue de C dans X et $\mathscr{U} = \{U_j |\ j \in J\}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout j dans J, soit U'_j un ouvert de L tel que $U'_j \cap X = U_j$, et soit $U' = \bigcup_j U'_j$; c'est un ouvert de L vérifiant $U' \cap X = U$. Soit $\mathscr{V}$ un recouvrement ouvert de U' tel que $\mathrm{St}(\mathscr{V})$ soit plus fin que $\mathscr{U}' = \{U'_j |\ j \in J\}$.

D'après le Lemme 3.8 de [10], il y a un plongement g_1 de C dans U' qui est $\mathscr{V}$-proche de f (l'hypothèse que l'espace de départ Y est complet dans l'énoncé du Lemme 3.8 de [10] n'est pas utilisée dans la démonstration). Alors, $g_1(C)$ est un $F_{\sigma\delta}$ dans U', donc la condition (C.1′), appliquée à U', fournit un Z-plongement g_2 de U' dans U' vérifiant

(1) g_2 est $\mathscr{V}$-proche de $\mathrm{id}_{U'}$,

(2) $g_2(U') \cap X = g_2(g_1(C))$.

Soit $g = g_2 \circ g_1$. D'après (2), g_2 est un plongement de C dans X qui, d'après (1), est $\mathscr{V}$-proche de g_1, donc $\mathscr{U}$-proche de f. Puisque $g_2(U')$ est fermé dans U', $g(C) = g_2(U') \cap X$ est fermé dans U. Pour voir que $g(C)$ est un Z-ensemble dans U, soit $\mathscr{H} = \{H_m | \ m \in M\}$ un recouvrement ouvert de U. Pour m dans M, soit H'_m un ouvert de U' tel que $H'_m \cap X = H_m$; posons $\mathscr{H}' = \{H'_m | \ m \in M\}$ et $H' = \bigcup_m H'_m$. H' est un ouvert de U' tel que $H' \cap X = U$. Soit $\mathscr{K}$ un recouvrement ouvert de H' tel que $\mathrm{St}(\mathscr{K})$ soit plus fin que $\mathscr{H}'$. Puisque $g_2(U')$ est un Z-ensemble dans U', $g_2(U') \cap H'$ est un Z-ensemble de la l^2-variété H'. Nous pouvons donc trouver une fonction continue k_1 de H' dans H', $\mathscr{K}$-proche de $\mathrm{id}_{H'}$, telle que la fermeture R de $k_1(H')$ dans H' soit disjointe de $g_2(U') \cap H'$. Nous pouvons donc trouver un recouvrement ouvert $\mathscr{K}_1$ de H', plus fin que $\mathscr{K}$ et tel qu'aucun élément de $\mathrm{St}(\mathscr{K}_1)$ ne rencontre à la fois R et $g_2(U')$. Il est possible de construire une fonction continue $\alpha\colon H' \to]0, 1]$ telle que, pour tout x dans H', $h(x, \alpha(x))$ appartienne à $H' \cap X$ et que, définissant k_2 par $k_2(x) = h(x, \alpha(x))$, la fonction k_2 soit $\mathscr{K}_1$-proche de k_1, ce qui, d'après le choix de $\mathscr{K}_1$, entraîne $k_2 \circ k_1(H') \subset (H' \backslash g_2(U')) \cap X$. Alors, la restriction k de $k_2 \circ k_1$ à U est $\mathscr{H}$-proche de id_U et vérifie $k(U) \subset U \backslash g_2(U') = U \backslash g(C)$, ce qui montre que $g(C)$ est un Z-ensemble dans U, donc que U est $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-absorbant, d'où le lemme.

Une Σ^∞-variété est un espace métrique dont tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de Σ^∞.

2.4. **Lemme.** *Deux Σ^∞-variétés sont homéomorphes si, et seulement si, elles ont le même type d'homotopie.*

Ce résultat est implicite dans la démonstration du Corollaire 5.6 de [2] où il est prouvé que si X est une Σ^∞-variété et K un complexe simplicial localement fini ayant le type d'homotopie de X, X est homéomorphe à $K \times \Sigma^\infty$.

3. Démonstration du Théorème 1.1 quand le bord de M est vide

Tout arc J contenu dans M a, dans M, un voisinage ouvert E homéomorphe à D. Alors, $a(E)$ est un voisinage de J dans $a(M)$ homéomorphe à $a(D)$. D'après le Lemme 2.4, il suffit, pour prouver le théorème, de montrer que $a(D)$ est homéomorphe à Σ^∞ et que $a(M)$ a le type d'homotopie de M.

3.1. **Lemme.** *Il existe une homotopie* $\Theta\colon \text{c.e.}^*(D) \times I \to \text{c.e.}^*(D)$ *vérifiant*

(i) $\Theta_0 = \mathrm{id}$,

(ii) $\Theta_t(\text{c.e.}^*(D)) \subset a(D)$ *pour tout* $t > 0$.

L'existence de Θ est prouvée dans [3] (Lemme 5.2) quand $a(D)$ est remplacé par l'espace $P(D)$ des pseudo-arcs contenus dans D. La démonstration n'utilise aucune propriété particulière au pseudo-arc et s'applique d'une façon générale lorsque $P(D)$ est remplacé par l'espace $K(D)$ des sous-continus de D

homéomorphes à un élément fixé K de c.e.*(D) (il suffit de remplacer, dans la démonstration du Lemme 5.1 de [3], le pseudo-arc P_0 par une copie K_0 de K contenant les deux points a et b).

3.2. **Lemme.** *Pour toute surface sans bord M, $a(M)$ est un rétracte absolu de voisinage qui a le type d'homotopie de M.*

Démonstration. Puisque c.e.*(D) est un rétracte absolu de voisinage [3, Lemme 4.1], l'existence de l'homotopie Θ du Lemme 3.1 implique que $a(D)$ en est un aussi (utilisier le Théorème 6.3, pp. 139–140, de [6]). Puisque $a(M)$ est localement homéomorphe à $a(D)$, c'est aussi un rétracte absolu de voisinage. Pour voir qu'il a le type d'homotopie de M, il suffit de remarquer que la démonstration due Lemme 7.1 de [3], qui prouve le résultat analogue pour l'espace $P(M)$ des pseudo-arcs de M, s'applique sans changement à $a(M)$.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $a(D)$ est homéomorphe à Σ^∞. Puisque c'est un rétracte absolu d'après le Lemme 3.2 et qu'il appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ [7], il suffit donc de montrer qu'il vérifie les conditions (C.1) et (C.2) du Lemme 2.1.

3.3. **Lemme.** *Le couple* (c.e.$_v(D)$, $a(D)$) *vérifie l'hypothèse* (H).

Démonstration. Que c.e.$_v(D)$ soit homéomorphe à l^2 résulte du Lemme 6.3 de [3] et du fait que, d'après le Lemme 5.2 de [3], tout sous-ensemble de c.e.*(D) contenant $P(D)$ a le type d'homotopie de c.e.*(D), donc est contractile (d'après les Lemmes 3.3 et 7.1 de [3]). Pour l'homotopie h demandée dans l'hypothèse (H), il suffit de prendre la restriction à c.e.$_v(D)$ de l'homotopie Θ du Lemme 3.1.

D'après le Lemme 2.3, la condition (C.1) pour $a(D)$ résultera de l'affirmation suivante qui sera prouvée au §5.

Affirmation 1. Le couple (c.e.$_v(D)$, $a(D)$) vérifie la condition (C.1$'$).

Pour étudier la condition (C.2), nous avons besoin d'une définition. Soit $\varepsilon > 0$; un arc J contenu dans un espace métrique X est dit ε-sinueux si, quels que soient les points distincts p et q de J, il existe dans J des points r et s entre p et q, tels que r soit entre p et s et que $d(p, s) < \varepsilon$ et $d(q, r) < \varepsilon$. Nous noterons Z_ε l'ensemble des arcs contenus dans D qui ne sont pas ε-sinueux. Il est connu que Z_ε est fermé dans $a(D)$ (voir la démonstration de (19.3) de [9]).

Affirmation 2. Pour tout $\varepsilon > 0$, Z_ε est un Z-ensemble dans $a(D)$.

Cette affirmation sera prouvée au §6. Puisque, évidemment, $a(D) = \bigcup_n Z_{1/n}$, elle implique, d'après le Lemme 2.2 que $a(D)$ vérifie la condition (C.2). Sa démonstration achèvera donc de prouver le Théorème 1.1 quand le bord de M est vide.

4. Deux constructions auxiliaires

Nous construirons aux Lemmes 4.1 et 4.2 deux fonctions dont nous avons besoin pour prouver l'affirmation 1. Commençons par quelques définitions. Si J est un arc dans $\mathbb{R}^2$ et $\omega: [a, b] \to J$ une paramétrisation (biunivoque) de J, nous dirons que ω est une paramétrisation C^1 si ω est continuement dérivable et si $\omega'(t) \neq 0$ pour tout t (au point a (resp. b), $\omega'(t)$ désigne la dérivée à droite (resp. gauche)). Nous dirons que ω est une paramétrisation

C^1 par morceaux s'il existe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tels que la restriction de ω à $[t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leq i < n)$ soit une paramétrisation C^1 pour tout i (en un point t_i avec $0 < i < n$, ω a donc des dérivées à gauche et à droite nonnulles).

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Nous noterons $A(K)$ l'ensemble des points x de K qui ont dans K un voisinage J qui est un arc contenant x dans son intérieur (donc, si K est un arc d'extrémités y, z, $A(K) = K \backslash \{y, z\}$). Nous noterons $R(K)$ le sous-ensemble de $A(K)$ formé des points x ayant dans K un voisinage J qui est un arc admettant une paramétrisation C^1 par morceaux, et nous noterons $V(K)$ le sous-ensemble de $R(K)$ formé des points x tels qu'aucun voisinage J de x dans K homéomorphe à un arc n'admette une paramétrisation C^1 (donc, si $x \in V(K)$, il y a un voisinage J de x dans K qui est un arc admettant une paramétrisation C^1 par morceaux $\omega\colon [a, b] \to J$; si t_0 est le point de $]a, b[$ tel que $\omega(t_0) = x$, ω a en t_0 des dérivées à gauche et à droite non nulles et distinctes). Enfin, nous poserons $N(K) = A(K) \backslash R(K)$. Il est clair que, si f est un difféomorphisme défini sur un voisinage de K et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et si $K' = f(K)$, alors $A(K') = f(A(K))$, $R(K') = f(R(K))$, $V(K') = f(V(K))$ et $N(K') = f(N(K))$; c'est cette remarque évidente qui nous permettra de distinguer les ensembles dans la démonstration de l'affirmation 1.

Posons $E = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \subset S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, $E^+ = [0, 1] \times [-1, 1]$ et $E^- = [-1, 0] \times [-1, 1]$. Soient $\text{c.e.}_v(E) = \text{c.e.}_v(S^2) \cap C(E)$ et $\text{c.e.}_v(E^+) = \text{c.e.}_v(S^2) \cap C(E^+)$.

4.1. **Lemme.** *Soient X un espace métrique et F un sous-ensemble de X de type $F_{\sigma\delta}$. Alors, il existe une fonction continue $\Gamma\colon X \to \text{c.e.}_v(E^+)$ vérifiant*

(i) *si x appartient à F, $\Gamma(x)$ est un arc,*
(ii) *si x n'appartient pas à F, $\Gamma(x)$ n'est pas localement connexe,*
(iii) *pour tout x dans X, $A(\Gamma(x)) = R(\Gamma(x))$.*

Démonstration. La démonstration qui suit est une adapation d'un argument d Mazurkiewicz [8]. Supposons la distance d de X bornée par 1, et soit $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^i$, où les F_k^i sont des fermés de X vérifiant $F_k^i \subset F_{k+1}^i$ quels que soient i et k. Pour x dans X, posons

$$r_k^i(x) = 2^{-i} + 2^{-(i+2k+1)} d(x, F_k^i), \quad s_k^i(x) = 2^{-i} + 2^{-(i+2k)} d(x, F_k^i).$$

Alors

(1) si $x \in F_k^i$, $r_k^i(x) = 2^{-i} = s_k^i(x)$,
(2) si $x \notin F_k^i$, $2^{-i} \leq s_{k+1}^i(x) < r_k^i(x) < s_k^i(x) \leq 2^{-i} + 2^{-(i+2k)} < 2^{-(i-1)}$.

Il en résulte que les intervalles $]r_k^i(x), s_k^i(x)[$ sont, pour x fixé, deux à deux disjoints. De plus, pour i fixé, un point x appartient à $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^i$ si, et seulement si, seul un nombre fini d'intervalles $]r_k^i(x), s_k^i(x)[$, $k \geq 1$, sont non vides. Pour x dans X, définissons une fonction (non continue) $g_x\colon [0, 1] \to [0, 1]$ par

$$g_x(0) = 1,$$

$$g_x(t) = 1 - 2^{-(i-1)} \quad \text{pour } 2^{-i} < t \leq 2^{-(i-1)} \quad \text{et} \quad t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty}]r_k^i(x), s_k^i(x)[,$$

$$g_x(t) = 1 - 2^{-(i-1)} + 2^{-i} \sin \left[\frac{\pi(t - r_k^i(x))}{s_k^i(x) - r_k^i(x)} \right] \quad \text{si } t \in]r_k^i(x), s_k^i(x)[.$$

Soit $K_1(x) = \{(t, g_x(t)) | 0 \le t \le 1\}$ le graphe de g_x, et soit $K_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{1/2^i\} \times [1 - 2^{-(i-1)}, 1 - 2^{-i}]$. Posons $\Gamma(x) = K_1(x) \cup K_2$. Il est facile de vérifier que Γ est continue et vérifie les conditions (i), (ii) et (iii).

Nous regarderons le cube de Hilbert comme le produit $Q = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, où $I_n = [0, 1]$ pour tout n. Pour $q = (q_n)$ dans Q, nous noterons $M_0(q)$ (resp. $M_1(q)$) l'ensemble des indices n tels que $q_n = 0$ (resp. $q_n = 1$).

4.2. **Lemme.** *Il existe une fonction continue* $\Delta: Q \to C(E^+)$ *vérifiant*

(i) $\Delta(q)$ *est un arc si, et seulement si,* $M_1(q) = \varnothing$,

(ii) *si* $M_1(q) \neq \varnothing$, $\Delta(q)$ *sépare* S^2,

(iii) *si* q *et* q' *sont deux points de* Q *tels qu'il existe des difféomorphismes* f *et* f' *définis sur un voisinage de* E^+ *et vérifiant* $f(\Delta(q)) = f'(\Delta(q'))$, *alors* $M_0(q) = M_0(q')$ *et* $M_1(q) = M_1(q')$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous identifierons I au segment $[0, 1] \times \{0\}$ de E^+ et le réel a de I au point $(a, 0)$. Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de I convergeant vers zéro et vérifiant $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ pour tout n. Choisissons des nombres $\eta_n > 0$ de façon que $a_{n+1} + \eta_{n+1} < a_n - \eta_n$ pour tout n et que $a_1 + \eta_1 < 1$. Posons

$$J_n = \left\{ \left(t, (t - a_n) \sin\left[\frac{\pi\eta_n}{t - a_n}\right] \right) \Big/ a_n - \eta_n \le t \le a_n + \eta_n \right\} \qquad (n \ge 1).$$

(Nous convenons que $(t - a_n)\sin[\pi\eta_n/(t - a_n)] = 0$ si $t = a_n$.) Soit

$$J_0 = \left(I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n - \eta_n, a_n + \eta_n[\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right).$$

Il est facile de voir que J_0 est un arc vérifiant

$$N(J_0) = \{a_n / n = 1, 2, \ldots\}, \tag{1}$$

$$V(J_0) = \{a_n \pm \eta_n / n = 1, 2, \ldots\}. \tag{2}$$

Pour $n \ge 1$, prenons des nombres b_n, c_n vérifiant $a_{n+1} + \eta_{n+1} < b_n < c_n < a_n + \eta_n$. Soient d_n le milieu du segment $[b_n, c_n]$ et e_n le milieu du segment $[b_n, d_n]$. Soient L_n le demicercle de diamètre $[b_n, c_n]$ situé dans le demi-plan supérieur. Pour $0 \le \theta \le 1$, soit $r_n(\theta)$ le point de L_n tel que l'angle $\widehat{c_n d_n r_n(\theta)}$ soit égal à $\theta\pi$, et soit $L_n(\theta)$ l'arc de L_n d'extrémités c_n et $r_n(\theta)$; nous avons donc $r_n(0) = c_n$, $r_n(1) = b_n$, et $r_n(\theta)$ dépend continuement de θ. Soit $R_n(\theta)$ le cercle de centre e_n passant par $r_n(\theta)$. Le segment $[d_n, c_n]$ contient exactement un des deux points d'intersection de $R_n(\theta)$ avec la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$; soit $t_n(\theta)$ ce point. Les points $r_n(\theta)$ et $t_n(\theta)$ décomposent le cercle $R_n(\theta)$ en deux arcs (dont l'un est dégénéré si $\theta = 0$); soit $T_n(\theta)$ celui de ces deux arcs qui est entièrement contenu dans le demi-plan supérieur (si $\theta = 0$, $T_n(\theta) = \{c_n\}$; si $\theta = 1$, $T_n(\theta)$ est un demi-cercle de diamètre $[b_n, d_n]$). Posons enfin, pour $0 \le \theta \le 1$,

$$Y_n(\theta) = [b_n, t_n(\theta)] \cup T_n(\theta) \cup L_n(\theta).$$

Si $\theta = 0$, $Y_n(\theta)$ est le segment $[b_n, c_n]$, si $0 < \theta < 1$, $Y_n(\theta)$ est un arc, et si $\theta = 1$, $Y_n(\theta)$ est un continu séparant S^2. Nous pouvons maintenant définir

Δ par

$$\Delta(q) = \left(J_0 \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty}]b_n\,,\, c_n[\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n(q_n)\right).$$

Il est facile de voir que $\Delta(q)$ est un continu contenu dans E^+, vérifiant les conditions (i) et (ii) et dépendant continûment de q. Pour prouver la condition (iii), soient $q = (q_n)$ et $q' = (q'_n)$ deux points de Q pour lesquels il existe des difféomorphismes f et f' définis sur un voisinage de E^+ vérifiant $f(\Delta(q)) = f'(\Delta(q')) = K$. D'après (1) et la définition des ensembles $Y_n(\theta)$, il est facile de vérifier que

$$N(\Delta(q)) = N(\Delta(q')) = \{a_n/n = 1\,,\, 2\,,\, \dots\}. \tag{3}$$

Comme nous l'avons remarqué au début de cette section, $N(K) = f(N(\Delta(q))) = f'(N(\Delta(q')))$; comme de plus $\Delta(q)\backslash\{a_n\}$ (resp. $\Delta(q')\backslash\{a_n\}$) a deux composantes, dont l'une contient $n-1$ points de $N(\Delta(q))$ (resp. $N(\Delta(q')))$, tandis que l'autre en contient une infinité, nous avons nécessairement $f(a_n) = f'(a_n)$ pour tout n.

L'ensemble $\Delta(q)\backslash\{a_n\,,\, a_{n+1}\}$ a trois composantes, dont une seule, soit $E_n(q)$, a pour frontière (dans $\Delta(q)$) l'ensemble $\{a_n\,,\, a_{n+1}\}$. Puique $f(a_n) = f'(a_n)$ et $f(a_{n+1}) = f'(a_{n+1})$, nous avons $f(E_n(q)) = f'(E_n(q'))$. Si $q_n = 1$, la fermeture de $E_n(q)$ sépare S^2, tandis que, si $0 \le q_n < 1$, cette fermeture est un arc; l'égalité $M_1(q) = M_1(q')$ en résulte. Si $q_n = 0$, $E_n(q)$ contient, d'après (2) et la définition de $Y_n(\theta)$, exactement deux points de $V(\Delta(q))$ $(a_{n+1} + \eta_{n+1}$ et $a_n - \eta_n)$, tandis que, si $0 < q_n < 1$, $E_n(q)$ contient cinq points de $V(\Delta(q))$ $(a_{n+1} + \eta_{n+1}\,,\, t_n(q_n)\,,\, r_n(q_n)\,,\, c_n$ et $a_n - \eta_n)$. Puisque $f(V(\Delta(q))) = V(K) = f'(V(\Delta(q')))$, l'égalité $M_0(q) = M_0(q')$ en résulte, d'où (iii).

Pour la démonstration de l'affirmation 1, nous combinerons les deux constructions précédentes comme suit. Soient X un espace métrique, F un sous-ensemble de X de type $F_{\sigma\delta}$, Γ la fonction associée á X et F par le Lemme 4.1, φ une fonction continue de X dans Q, et Δ la fonction du Lemme 4.2. Posons, pour x dans X,

$$\Lambda_\varphi(x) = \Gamma^-(x) \cup \Delta(\varphi(x)),$$

où $\Gamma^-(x)$ est le sous-ensemble de E^- obtenu en translatant $\Gamma(x)$ d'une unité vers la gauche. Il est clair que $\Gamma^-(x)$ et $\Delta(\varphi(x))$ ont en commun le seul point 0 de I, donc $\Lambda_\varphi(x)$ est un continu contenu dans E. La fonction $\Lambda_\varphi \colon X \to C(E)$ ainsi obtenue est continue puisque Γ, Δ et φ le sont.

4.3. **Lemme.** *La fonction* Λ_φ *possède les propriétés suivantes*:

(P1) $\Lambda_\varphi(x) \in \text{c.e.}_v(E)$ *si* $M_1(\varphi(x)) = \varnothing$, $\Lambda_\varphi(x)$ *sépare* S^2 *si* $M_1(\varphi(x)) \neq \varnothing$,

(P2) $\Lambda_\varphi(x)$ *est un arc si, et seulement si,* x *appartient à* F *et* $M_1(\varphi(x)) = \varnothing$,

(P3) *Si* x *et* x' *sont deux points de* X *tels qu'il existe des difféomorphismes* f *et* f' *définis sur un voisinage de* E *et vérifiant* $f(\Lambda_\varphi(x)) = f'(\Lambda_\varphi(x'))$, *alors* $M_0(\varphi(x)) = M_0(\varphi(x'))$ *et* $M_1(\varphi(x)) = M_1(\varphi(x'))$.

Démonstration. (P1) et (P2) sont des conséquences immédiates des propriétés (i) et (ii) des Lemmes 4.1 et 4.2. Pour vérifier (P3), soient x, x' deux points de X et f, f' des difféomorphismes définis sur un voisinage de E tels que $f(\Lambda_\varphi(x)) = f'(\Lambda_\varphi(x')) = K$. A l'aide de (iii) du Lemma 4.1 et de la relation (3) dans la démonstration du Lemme 4.2, il est facile de vérifier que

$N(\Lambda_\varphi(x)) = \{0\} \cup \{a_n/n = 1, 2\ldots\} = N(\Lambda_\varphi(x'))$. En utilisant, comme dans la démonstration du Lemme 4.2, le fait que $f(N(\Lambda_\varphi(x))) = N(K) = f'(N(\Lambda_\varphi(x')))$, il est facile d'en déduire que $f(0) = f'(0)$ et $f(\Delta(\varphi(x))) = f'(\Delta(\varphi(x')))$; la condition (P3) résulte alors de (iii) du Lemme 4.2.

Le lemme suivant permettra d' exploiter la condition (P3).

4.4. **Lemme.** *Soit X un espace métrique séparable. Il existe un plongement ψ de X dans Q vérifiant,*

(i) $M_1(\psi(x)) = \varnothing$ *quelque soit* x,
(ii) *si x et y sont deux points distincts de X,* $M_0(\psi(x)) \neq M_0(\psi(y))$.

Démonstration. Soit $\mathscr{U} = \{U_j\}_{j=1}^\infty$ une base dénombrable de X. L'ensemble des couples $\mathscr{C} = \{U_i, U_j\}$ d'éléments de $\mathscr{U}$ vérifiant $\overline{U}_i \subset U_j$ est dénombrable; soit $\mathscr{C}_n = \{U_{i_n}, U_{j_n}\}$, $n \geq 1$, une énumération de ces couples. Pour tout n, soit ψ_n une fonction continue de X dans $[0, 1/2]$ telle que $\psi_n(x) = 0$ si $x \in \overline{U}_{i_n}$ et $\psi_n(x) = 1/2$ si $x \in X\backslash U_{j_n}$. Alors, $\psi = (\psi_n)$ est un plongement de X dans Q vérifiant (i). De plus, si $x \neq y$, il y a un n tel que, si $\mathscr{C}_n = \{U_{i_n}, U_{j_n}\}$, x appartienne à U_{i_n} et y à $X\backslash U_{j_n}$, alors n appartient à $M_0(\psi(x))$, mais pas à $M_0(\psi(y))$, d'où (ii).

5. Démonstration de l'affirmation 1

Soit U un ouvert de $\text{c.e.}_v(D)$, F un sous-ensemble de U de type $F_{\sigma\delta}$ et $\mathscr{U} = \{U_\alpha/\alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de U. Puisque $C(D)$ est ouvert dans $C(S^2)$, nous pouvons trouver, pour tout α dans A, un ouvert U'_α de $C(S^2)$ contenu dans $C(D)$ tel que $U'_\alpha \cap \text{c.e.}_v(S^2) = U_\alpha$. Soient $U' = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$ et $\mathscr{U}' = \{U'_\alpha/\alpha \in A\}$. Puisque $\text{c.e.}_v(D)$ est topologiquement complet et U ouvert dans $\text{c.e.}_v(D)$, U est un G_δ absolu, donc $U'\backslash U$ est un F_σ; soit $U'\backslash U = \bigcup_{n=1}^\infty P_n$, où P_n est fermé dans U'. Pour $n \geq 1$, soit σ_n une fonction continue de U' dans $[0, 1]$ telle que $\sigma_n^{-1}(1) = P_n$. Conformément au Lemme 4.4, soit $\psi = (\psi_n)$ un plongement de U' dans Q tel que $M_1(\psi(C)) = \varnothing$ pour tout C dans U' et $M_0(\psi(C)) \neq M_0(\psi(C'))$ si $C \neq C'$. Soit $\varphi = (\varphi_n)$ l'application de U' dans Q définie par $\varphi_{2n} = \sigma_n$ et $\varphi_{2n+1} = \psi_n$ pour tout $n \geq 1$. D'après le choix des σ_n et de ψ, il est facile de voir que φ vérifie

(1) $M_1(\varphi(C)) \neq \varnothing$ si, et seulement si, $C \in U'\backslash U$,
(2) $M_0(\varphi(C)) \neq M_0(\varphi(C'))$ si $C \neq C'$.

Puisque F est un $F_{\sigma\delta}$ dans l'espace topologiquement complet U, c'est un $F_{\sigma\delta}$ absolu, donc un $F_{\sigma\delta}$ dans U'; soit $\Gamma\colon U' \to C(E^+)$ une fonction vérifiant les conditions du Lemme 4.1 pour $X = U'$ et F. Aux fonctions Γ et φ ainsi construites, associons, comme à la section précédente, la fonction $\Lambda_\varphi\colon U' \to C(E)$ définie par $\Lambda_\varphi(C) = \Gamma^-(C) \cup \Delta(\varphi(C))$.

Cette fonction vérfie les conditions (P1), (P2) et (P3) du Lemme 4.3.

Soient p_0, f_C, F et Π comme il est expliqué au §1. Nous construirons le plongement g cherché sous la forme $g(C) = f_C \circ \mu_C(\Lambda_\varphi(C))$, où μ_C est un plongement de E dans D. Cette construction se fera en deux étapes.

Il est facile de construire une fonction continue $\varepsilon\colon U' \to]0, 1]$ vérifiant

(3) pour tout C dans U', $B_\rho(C, \varepsilon(C))$ est contenu dans un élément de $\mathscr{U}'$.

Nous pouvons supposer que ε vérfie aussi

(4) $\varepsilon(C) < \rho(C, C(S^2)\backslash U')$ pour tout C dans U'.

Pour C dans U, soit $\beta(C)$ la borne inférieure des nombres $0 < t \leq 1$ vérfiant

(5) $\rho(C, \Pi(C, s)) < \frac{1}{2}\varepsilon(C)$ pour tout $s \in [t, 1]$.

La continuité de Π entraîne que $\beta(C) < 1$ pour tout C dans U, et que la fonction β ainsi définie est semi-continue supérieurement. Nous pouvons donc [4, 4.3, p. 171] trouver une fonction continue $\gamma\colon U \to [0, 1]$ vérifiant

(6) $\beta(C) < \gamma(C) < 1$ pour tout C dans U.

Il est clair que tout nombre t dans $]\beta(C), 1[$ vérifie (5); il résulte donc de (6) que la fonction $h\colon U \to (C(S^2)$, définie par $h(C) = \Pi(C, \gamma(C))$ vérifie

(7) $\rho(C, h(C)) < \frac{1}{2}\varepsilon(C)$.

Munissons D de coordinées polaires (r, θ). Pour tout couple de nombres (a, b) vérifiant $0 < a < 1$ et $0 \leq b \leq \frac{1}{2}\min(a, 1-a)$, définissons une fonction $\mu(a, b)$ de E dans D par

$$\mu(a, b)(u, v) = (a + b(u + \tfrac{1}{2}v), \pi u), \qquad -1 \leq u, v \leq 1.$$

Si $b = 0$, $\mu(a, b)$ envoie E sur $S(a)$, tandis que si $b > 0$, $\mu(a, b)$ se prolonge en un difféomorphisme d'un voisinage de E dans D; évidemment, μ dépend continuement de a et b. Soient d_0 la distance euclidienne sur D, et ρ_0 la distance de Hausdorff associée à d_0. Nous avons alors, quels que soient a et b $(0 < a < 1$ et $0 \leq b \leq \frac{1}{2}\min(a, 1-a))$

(8) $\rho_0(S(a), \mu(a, b)(K)) \leq \frac{2}{3}b$ pour tout sous-continu K de E rencontrant à la fois $\{-1\} \times [-1, 1]$ et $\{1\} \times [-1, 1]$.

Pour voir cela, il suffit de remarquer que toute demi-droite L d'origine 0 rencontre à la fois $S(a)$ et $\mu(a, b)(K)$, et que tout point (r, θ) de $\mu(a, b)(E)$ vérifie $a - \frac{3}{2}b \leq r \leq a + \frac{3}{2}b$.

Pour C dans U, soit $\eta(C)$ la borne supérieure des nombres $t \in [0, \frac{1}{2}\min(\gamma(C), 1 - \gamma(C))]$ vérfiant

(9) $\rho(h(C), f_C \circ \mu(\gamma(C), s)(\Lambda_\varphi(C))) < \min(\frac{1}{2}\varepsilon(C), 1-\gamma(C))$ pour tout $s \in [0, t]$.

Puisque $h(C) = \Pi(C, \gamma(C)) = f_C(S(\gamma(C)))$ et que $\Lambda_\varphi(C)$ rencontre à la fois $\{-1\} \times [-1, 1]$ et $\{1\} \times [-1, 1]$, il résulte de (8) que $\eta(C) > 0$. De plus, en utilisant la continuité des fonctions h, F, μ, γ et Λ_φ, il est facile de voir que la fonction η est semi-continue inférieurement. Nous pouvons donc trouver [4, 4.3, p. 171] une fonction continue $\xi\colon U \to [0, 1]$ vérifiant

(10) $0 < \xi(C) < \eta(C)$ pour tout C dans U.

Posons alors $\mu_C = \mu(\gamma(C), \xi(C))$ et $g(C) = f_C \circ \mu_C(\Lambda_\varphi(C))$.

La fonction g est alors continue. D'après (1) et la propriété (P1), g envoie U dans $\text{c.e.}_v(S^2)$. Remarquant que la condition (9) est vérifiée pour tout nombre $t \in [0, \eta(C)[$ nous constatons par (10) que, pour tout C dans U,

(11) $\rho(h(C), g(C)) < \min(\frac{1}{2}\varepsilon(C), 1 - \gamma(C))$, d'où, d'après (7),

(12) $\rho(C, g(C)) < \varepsilon(C)$.

D'après (3), il y a, pour tout C dans U, un α tel que U'_α contienne à la fois C et $g(C)$; alors $g(C)$ appartient à $U'_\alpha \cap \text{c.e.}_v(S^2) = U_\alpha$; ceci montre que g envoie U dans lui-même et est $\mathscr{U}$-proche de id_U. D'après (1) et la propriété (P2), $g(C)$ est dans $a(D)$ si, et suelement si, C appartient à F. Il ne reste plus qu'à vérifier que g est un Z-plongement de U dans U.

Soient C et C' deux éléments distincts de U. D'après (2), $M_0(\varphi(C)) \neq M_0(\varphi(C'))$. Puisque $\xi(C), \xi(C') > 0$, $f_C \circ \mu_C$ et $f_{C'} \circ \mu_{C'}$ se prolongent en des difféomorphismes sur un voisinage de E; d'après la propriété (P3), il en résulte que $g(C) \neq g(C')$, donc g est injective.

Pour montrer que g est un plongement fermé de U dans U, il suffit de vérifier que si $\{C_l\}_{l=1}^{\infty}$ est une suite d éléments de U telle que la suite $\{g(C_l)\}$ converge vers un élṁent C de U, il existe un C' dans U (unique puisque g est injective) tel que $g(C') = C$ et, qu'en outre, il y a une sous-suite de $\{C_l\}$ qui converge vers C'. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{C_l\}$ converge vers un élément C_0 de $C(S^2)$. Il suffit de montrer que C_0 appartient à U, car alors $\{g(C_l)\}$ tend vers $g(C_0)$, donc $C' = C_0$ est l'élément cherché. Supposons que C_0 n'appartienne pas à U; alors C_0 appartient à $\overline{U}'$. Distinguons deux cas.

Cas I. C_0 appartient à la frontière de U'. Alors, d'après (4), $\{\varepsilon(C_l)\}$ tend vers zéro, donc, d'après (12), les suites $\{C_l\}$ et $\{g(C_l)\}$ ont la même limite $C_0 = C$, ce qui est absurde car C est dans U, mais pas C_0.

Cas II. C_0 appartient à $U' \backslash U = U' \backslash \text{c.e.}_v(S^2)$; ou bien l'intérieur de C_0 n'est pas vide, ou bien C_0 sépare S^2. Pour simplifier les notations, nous poserons, pour $l = 1, 2, \ldots$, $f_l = f_{C_l}$, $\gamma_l = \gamma(C_l)$, $\xi_l = \xi(C_l)$ et $\mu_l = \mu_{C_l}$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que les suites $\{\gamma_l\}$ et $\{\xi_l\}$ convergent vers γ_0 et ξ_0 respectivement; alors $0 \leq \gamma_0 \leq 1$ et $0 \leq \xi_0 \leq \frac{1}{2}\min(\gamma_0, 1 - \gamma_0)$. Soit H la composante de $S^2 \backslash C_0$ qui contient $S^2 \backslash \overline{D}(S^2 \backslash \overline{D} \subset S^2 \backslash C_0$ car U' est contenu dans $C(D))$, et soit f_0 la représentation conforme de D sur H vérifiant $f_0(0) = p_0$ et $f_0'(0) > 0$. Alors [3, Lemmes 2.1 et 2.2], la suite $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$ converge vers f_0 uniformément sur tout compact de D. Nous avons $\gamma_0 > 0$ sans quoi, puisque $f_0(0) \notin \overline{D}$ et que $\{f_l\}$ converge uniformément vers f_0 sur tout compact, nous aurions $h(C_l) = f_l(S(\gamma_l)) \subset S^2 \backslash \overline{D}$ pour l assez grand, contrairement à (7) et (4) (rappelons que $U' \subset C(D)$). Il y a trois possibilités.

(a) $0 < \gamma_0 < 1$ et $\xi_0 > 0$. Alors $\{\Lambda_\varphi(C_l)\}$ tend vers $\Lambda_\varphi(C_0)$ et $\{\mu_l\}$ converge uniformément vers $\mu(\gamma_0, \xi_0)$ sur E. Puisque $\mu(\gamma_0, \xi_0)(E)$ est contenu dans un compact de D et que la suite $\{f_l\}$ converge uniformément vers f_0 sur tout compact, $g(C_l) = f_l \circ \mu_l(\Lambda_\varphi(C_l))$ converge vers $C = f_0 \circ \mu(\gamma_0, \xi_0)(\Lambda_\varphi(C_0))$. Mais ce dernier ensemble est homéomorphe à $\lambda_\varphi(C_0)$ puisque $\xi_0 > 0$, donc sépare S^2 d'après (1) et la propriété (P1). Ceci contredit l'hypothèse que C appartient à $U \subset \text{c.e.}_v(S^2)$.

(b) $0 < \gamma_0 < 1$ et $\xi_0 = 0$. Alors $\{\mu_l(\Lambda_\varphi(C_l))\}$ converge vers $S(\gamma_0)$ (voir (8)). Par suite, $\{g(C_l)\}$ converge vers $f_0(S(\gamma_0))$, qui est une courbe simple fermée, donc n'appartient pas à $\text{c.e.}_v(S^2)$, une contradiction.

(c) $\gamma_0 = 1$. D'après (11), $\rho(h(C_l), g(C_l))$ tend vers zéro, donc C est aussi la limite de la suite $h(C_l) = f_l(S(\gamma_l))$. Pour tout l, la courbe simple fermée $f_l(S(\gamma_l))$ sépare S^2 entre p_0 et C_l, donc la limite C de $\{f_l(S(\gamma_l))\}$ sépare S^2 entre p_0 et tout point p de $C_0 \backslash C$ (sinon, $S^2 \backslash C$ contiendrait un arc L reliant p_0 à p, ainsi qu'un disque fermé B de centre p. Pour l assez grand, $f_l(S(\gamma_l)) \cap (L \cup B) = \varnothing$. Puisque p appartient à la limite de $\{C_l\}$, $B \cap C_l = \varnothing$ pour tout l assez grand, donc $L \cup B$ est un continu reliant p_0 à C_l, d'où $(L \cup B) \cap f_l(S(\gamma_l)) \neq \varnothing$: contradiction); puisque C ne sépare pas S^2, il contient donc C_0. Puisque C a un intérieur vide, C_0 aussi, donc C_0 sépare S^2. Soit K la réunion de C_0 et des composantes de $S^2\backslash C_0$ contenues dans D. Puisque C a un intérieur vide, il ne contient pas K; mais alors, puisqu'il contient C_0, il sépare S^2 entre $S^2\backslash D$ et $K\backslash C$, ce qui est impossible.

Ceci achève de prouver que g est un plongement fermé de U dans U.

Montrons que $g(U)$ est un Z-ensemble dans U. Soit $J = [-1, 1] \times \{0\} \subset E$. En raisonnant comme dans la construction de g, nous constatons que id_U peut être approximée arbitrairement par des fonctions k du type $k(C) = f_C \circ \mu(\gamma'(C), \xi'(C))(J)$, où γ', ξ' sont des fonctions continues de U dans $]0, 1[$ vérifiant $\xi'(C) < \frac{1}{2}\min(\gamma'(C), 1-\gamma'(C))$. Soient C, C' deux éléments de U. Alors, $f_C \circ \mu(\gamma'(C), \xi'(C))|J$ est une paramétrisation C^1 de l'arc $k(C)$. D'autre part, d'après la démonstration de la propriété (P3) au Lemme 4.3, $N(\Lambda_\varphi(C'))$ est un ensemble infini, donc aussi $N(g(C')) = N(f_{C'} \circ \mu_{C'}(\Lambda_\varphi(C')))$ puisque $f_{C'} \circ \mu_{C'}$, se prolonge en un difféomorphisme sur un voisinage de E. Par suite, $k(C) \neq g(C')$, ce qui montre que $k(U) \subset U\backslash g(U)$, donc que $g(U)$ est un Z-ensemble.

6. Démonstration de l'affirmation 2

Nous avons besoin d'une construction auxiliaire. Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels ≥ 0.

6.1. **Lemme.** *Il existe un plongement $\omega\colon \mathbb{R}^+ \to D$ vérifiant*

(i) *l'arc $\omega([t, t+1])$ tend vers S^1 quand t tend vers $+\infty$,*

(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $M(\varepsilon)$ tel que $\omega([t, t+1])$ soit ε-sinueux pour tout $t \geq M(\varepsilon)$.*

Démonstration. Munissons D de coordonnées polaires (r, θ) et de la distance euclidienne. Pour $n \geq 1$, soit $a_n = (1 - 1/2^n, 0)$ et soit A_n l'anneau $A_n = \{(r, \theta)/1 - 1/2^n \leq \theta \leq 1 - 1/2^{n+1}\}$. Soit $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, et soit ∂I^2 le bord de I^2. Pour $n \geq 1$, soit h_n l'application de I^2 sur A_n définie par

$$h_n(u, v) = \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{u}{2^{n+1}}, 2\pi v\right), \qquad 0 \leq u, v \leq 1.$$

Soient $a = (0, 0)$, $a' = (1, 0)$ et $b = (\frac{1}{2}, 1)$; alors $h_n(a) = a_n$ et $h_n(a') = a_{n+1}$, $n \geq 1$. Si J est un arc contenu dans I^2 tel que $J \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$, alors $h_n(J)$ est un arc d'extrémités a_n et a_{n+1} contenu dans A_n et ayant seulement a_n et a_{n+1} en commun avec le bord de A_n. Nous allons montrer qu'il existe, pour tout $n \geq 1$, un arc J_n dans I^2 vérifiant

(1) $$J_n \cap \partial I^2 = \{a, a', b\},$$

(2) l'arc $h_n(J_n)$ est 2^{-n}-sinueux.

Supposons les J_n construits. Soit $T_n = h_n(J_n)$, et soit ω_n un homéomorphisme de $[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$ sur T_n tel que $\omega_n(\frac{n-1}{2}) = a_n$ et $\omega_n(\frac{n}{2}) = a_{n+1}$. Définissons alors ω par $\omega|[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}] = \omega_n$ pour tout $n \geq 1$. Il est clair que ω est un plongement. Soit, en coordonnées polaires, $\omega(t) = (r(t), \theta(t))$; choisissons θ de façon que θ soit continue et que $\theta(0) = 0$. Il est alors facile de voir, par récurrence sur n que, si $\frac{n-1}{2} \leq t \leq \frac{n}{2}$ et si $\omega(t) = h_n(u, v)$, alors $\theta(t) = 2\pi v$.

En particulier, nous avons

(3) $$0 \leq \theta(t) \leq 2\pi \quad \text{pour tout } t,$$

(4) $$\theta(a_n) = 0 \quad \text{pour tout } n,$$

(5) $$\text{si } \omega(t_n) = h_n(b), \quad \text{alors } \theta(t_n) = 2\pi.$$

Etant donné t dans $\mathbb{R}^+$, soit n tel que $\frac{n-1}{2} \leq t < \frac{n}{2}$. Alors, $\omega([t, t+1])$ est contenu dans $T_n \cup T_{n+1} \cup T_{n+2}$ et contient T_{n+1}. Pour s dans $[t, t+1]$, nous avons donc $r(s) \geq 1 - 1/2^n$. De plus, d'après (4), (5) et la continuité de θ, toute demi-droite d'origine 0 recontre T_{n+1}, donc aussi $\omega([t, t+1])$. Il est facile de déduire de tout cela que $\rho(S^1, \omega([t, t+1])) \leq 2^{-n}$ si $\frac{n-1}{2} \leq t < \frac{n}{2}$; la condition (i) en résulte.

Si p et q sont deux points de $\omega(\mathbb{R}^+)$, nous noterons $p \leq q$ si $p = \omega(t)$ et $q = \omega(t')$ avec $t \leq t'$. Pour vérifier la condition (ii), il suffit de montrer que $\omega([t, t+1])$ est 2^{-n+1}-sinueux si $\frac{n-1}{2} \leq t < \frac{n}{2}$. Soient $p = \omega(s_1)$ et $q = \omega(s_2)$ deux points de $\omega([t, t+1])$ avec $p \leq q$; puisque $\omega([t, t+1])$ est la réunion des trois sous-arcs $\omega([t, t+1]) \cap T_{n+k}$, $k = 0, 1, 2$, il y a quatre possibilités.

(a) Il existe un k tel que $\omega([t, t+1]) \cap T_{n+k}$ contienne p et q. D'après (2), nous pouvons trouver des points r, s de $\omega([t, t+1]) \cap T_{n+k}$ tels que $p \leq r \leq s \leq q$ et que $d(p, s) < 1/2^{n+k}$ et $d(q, r) < 1/2^{n+k}$.

(b) p appartient à T_n et q à T_{n+1}. Si $\theta(s_1) \leq \theta(s_2)$, nous pouvons, d'après (4), trouver un point $p' = \omega(s_3)$ tel que $p \leq a_{n+1} \leq p' \leq q$ et $\theta(s_3) = \theta(s_1)$. Puisque $r(s_3) \geq 1 - 1/2^{n+1} \geq r(s_1) \geq 1 - 1/2^n$ nous avons $d(p, p') < 1/2^n$. D'après (2), nous pouvons trouver des points r et s dans T_{n+1} avec $p' \leq r \leq s \leq q$, $d(q, r) < 1/2^{n+1}$ et $d(p', s) < 1/2^{n+1}$, donc $d(p, s) < 1/2^n + 1/2^{n+1} < 1/2^{n-1}$.

Si $\theta(s_1) > \theta(s_2)$, prenons un point $q' = \omega(s_4)$ vérifiant $p \leq q' \leq a_{n+1} \leq q$ et $\theta(s_4) = \theta(s_2)$; alors $d(q, q') < 1/2^n$ et (2) permet de trouver des points r et s dans T_n avec $p \leq r \leq s \leq q'$, $d(p, s) < 1/2^n$ et $d(q', r) < 1/2^n$, donc $d(q, r) < 1/2^{n-1}$.

(c) p appartient à T_{n+1} et q à T_{n+2}. Ce cas se traite comme le précédent.

(d) p appartient à T_n et q à T_{n+2}. En utilisant (3), (4) et (5), nous pouvons trouver des points $p' = \omega(s_3)$ et $q' = \omega(s_4)$ vérifiant $p \leq a_{n+1} \leq p' \leq h_{n+1}(b) \leq q' \leq a_{n+2} \leq q$ et $\theta(s_3) = \theta(s_1)$, $\theta(s_4) = \theta(s_2)$. Alors $d(p, p') < 1/2^n$ et $d(q, q') < 1/2^{n+1}$. D'après (2), il y a des points r et s dans T_{n+1} avec $p' \leq r \leq s \leq q'$ et $d(p', s) < 1/2^{n+1}$, $d(q', r) < 1/2^{n+1}$. Nous avons donc $d(p, s) < 1/2^n + 1/2^{n+1}$ et $d(q, r) < 1/2^n$. Ceci achève de vérifier la condition (ii).

Pour construire J_n, il suffit, d'après la continuité uniforme de h_n, de construire, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, un arc J dans I^2 qui est ε-sinueux et vérifie $J \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$. Soit $P_\varepsilon = I^2 \backslash [\varepsilon/4, 1 - \varepsilon/4] \times [0, 1 - \varepsilon/4]$. Puisque les arcs $\varepsilon/2$-sinueux sont denses dans $C(\mathbb{R}^2)$ [9, p. 614], nous pouvons trouver un arc $\varepsilon/2$-sinueux J' contenu dans l'intérieur de P_ε et rencontrant les deux boules ouvertes $B(a, \varepsilon/4)$ et $B(a', \varepsilon/4)$. Soit J'' un arc qui est réunion d'un segment de droite contenu dans $B(a, \varepsilon/4)$ reliant a à J', d'un sous-arc de J' et d'un segment contenu dans $B(a', \varepsilon/4)$ reliant J' à a'; alors $J'' \cap \partial I^2 = \{a, a'\}$ et, puisque J'' est contenu dans P_ε, il recontre la boule $B(b, \varepsilon/4)$. Soit J un arc déduit de J'' en remplaçant un sous-arc K_1 de J'' contenu dans $B(b, \varepsilon/4)$ par un arc K_2 contenu dans $B(b, \varepsilon/4)$ tel que

$K_2 \cap \partial I^2 = \{b\}$. Alors $J \cap \partial I^2 = \{a, a', b\}$ et il est facile de vérifier que J est ε-sinueux.

Démonstration de l'affirmation 2. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour prouver que Z_ε est un Z-ensemble, il faut montrer que, pour toute fonction continue $\alpha : a(D) \to]0, 1]$, il existe une fonction continue $g: a(D) \to a(D) \backslash Z_\varepsilon$ vérifiant $\rho(C, g(C)) < \alpha(C)$ pour tout C dans $a(D)$. Il suffit de le faire quand α vérifie

(1) $$\alpha(C) < d(C, S^2 \backslash D) \quad \text{pour tout } C \text{ dans } a(D).$$

Soient p_0, f_C, F et Π comme dans le §1. En raisonnant comme dans la démonstration de l'affirmation 1, nous pouvons construire une fonction continue $\gamma : a(D) \to]0, 1[$ telle que la fonction $h: a(D) \to C(S^2)$ définie par $h(C) = \Pi(C, \gamma(C))$ vérifie

(2) $$\rho(C, h(C)) < \tfrac{1}{2}\alpha(C) \quad \text{pour tout } C \text{ dans } a(D).$$

Pour $0 < s < 1$, soit $R(s)$ l'homéomorphisme radial de $\overline{D}$ sur $\overline{B}(s)$ $(R(s)(z) = s \cdot z)$. Pour t dans $\mathbb{R}^+$, soit $\Omega(t) = \omega([t, t+1])$, où ω est le plongement du Lemma 6.1; posons $\Omega(\infty) = S^1$. La fonction Ω ainsi définie, de $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ dans $C(\overline{D})$ est continue d'après (i) du Lemme 6.1. Pour C dans $a(D)$, soit $\zeta(C)$ la borne inférieure des nombres $t \geq 0$ vérifiant simultanément les deux conditions suivantes

(3) $$\rho(h(C), f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(s))) < \tfrac{1}{2}\alpha(C) \quad \text{pour tout } s \text{ dans } [t, \infty],$$

(4) $$f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(s)) \text{ est } \varepsilon\text{-sinueux} \quad \text{pour tout } s \text{ dans } [t, \infty[.$$

Il résulte du Lemme 6.1 et de la continuité uniforme de f_C sur le disque $\overline{B}(\gamma(C))$ que, pour tout C donné, l'ensemble des t vérfiant ces deux conditions n'est pas vide. Montrons que la fonction ζ est semi-continue supérieurement. Dans le cas contraire, nous pouvons trouver un C_0 dans $a(D)$, un nombre $t_0 > \zeta(C_0)$, et une suite $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ d'éléments de $a(D)$ convergeant vers C_0 et tels que $\zeta(C_n) > t_0$ pour tout $n \geq 1$. Posons, pour $n \geq 0$, $f_n = f_{C_n}$, $\gamma_n = \gamma(C_n)$ et $\zeta_n = \zeta(C_n)$. La continuité des fonctions α, h, γ, F et Ω entraîne que l'ensemble V des couples (C, s) tels que $\rho(h(C), f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(s))) < \frac{1}{2}\alpha(C)$ est ouvert dans $a(D) \times \overline{\mathbb{R}}^+$. Puisque V contient $\{C_0\} \times [t_0, \infty]$, il contient $\{C_n\} \times [t_0, \infty]$ pour tout $n \geq N_0$ (nous supposerons que $N_0 = 1$); alors t_0 vérifie la condition (3) relativement à C_n, donc, puisque $t_0 < \gamma_n$, il ne vérifie pas la condition (4). Nous pouvons donc trouver un nombre $s_n \geq t_0$ tel que l'arc $f_n \circ R(\gamma_n)(\Omega(s_n))$ ne soit pas ε-sinueux. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers $s_0 \in [t_0, \infty]$.

Quand n tend vers l'infini, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ tend vers γ_0, donc $R(\gamma_n)$ converge vers $R(\gamma_0)$, uniformement sur $\overline{D}$. D'après la continuité de F, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers f_0 uniformément sur tout compact de D; puisque $\gamma_n < 1$ pour tout n, il en résulte que la suite $\{f_n \circ R(\gamma_n)\}_{n=1}^\infty$ converge vers $f_0 \circ R(\gamma_0)$ uniformément sur $\overline{D}$. La famille $\{f_n \circ R(\gamma_n)\}_{n=0}^\infty$ est donc uniformément équicontinue sur $\overline{D}$, ce qui entraîne l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout arc δ-sinueux J contenu dans $\overline{D}$, $f_n \circ R(\gamma_n)(J)$ soit ε-sinueux dans S^2 pour tout $n \geq 0$. Si $M(\delta)$ est le nombre donné par le condition (ii) du Lemme 6.1, nous avons donc $s_n \leq M(\delta)$ pour tout $n \geq 1$, d'où $s_0 < \infty$. Mais alors, $\{f_n \circ R(\gamma_n)(\Omega(s_n))\}$ converge vers $f_0 \circ R(\gamma_0)(\Omega(s_0))$. D'après le choix de s_n, $f_n \circ R(\gamma_n)(\Omega(s_n))$ n'est pas ε-sinueux pour tout $n \geq 1$, donc il en est de même de $f_0 \circ R(\gamma_0)(\Omega(s_0))$, ce qui contredit la définition de $\zeta(C_0)$ puisque $s_0 \geq t_0 > \zeta(C_0$.

Puisque ζ est semi-continue supérieurement, nous pouvons trouver [4, 4.3, p. 171] une fonction continue $\xi: a(D) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

(5) $$\zeta(C) < \xi(C) \quad \text{pour tout } C \text{ dans } a(D).$$

Définissons alors $g: a(D) \to a(S^2)$ par

$$g(C) = f_C \circ R(\gamma(C))(\Omega(\xi(C))).$$

Il résulte de (5) et (3) que $\rho(g(C), h(C)) < \frac{1}{2}\alpha(C)$, d'où , d'après (2), $\rho(C, g(C)) < \alpha(C)$ pour tout C. D'après (1), cela entraîne que $g(C)$ est contenu dans D. Enfin, d'après (5) et (4), $g(C)$ est ε-sinueux pour tout C, donc g est la fonction cherchée de $a(D)$ dans $a(D)\backslash Z_\varepsilon$. Ceci achève de prouver l'affirmation 2, donc aussi le Théorème 1.1.

7. Démonstration du Théorème 1.1 pour les surfaces à bord

Si M est une surface à bord, nous noterons ∂M son bord et $\mathring{M}$ son intérieur.

Nous avons besoin de deux lemmes.

7.1. **Lemme.** *Soit M une surface à bord. Il existe une homotopie $H: a(M) \times I \to a(M)$ vérifiant*

(i) $H_0 = \mathrm{id}$,

(ii) $H_t(a(M)) \subset a(\mathring{M})$ *pour tout* $t > 0$,

(iii) H *est fermée au-dessus de* $a(M)\backslash a(\mathring{M})$.

Démonstration. Ce lemme a été démontré dans [3, Lemme 7.3] pour l'espace $P(M)$ des pseudo-arcs de M ; le même argument s'applique à $a(M)$.

7.2. **Lemme.** *Soient X un espace appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ et A un ouvert de X. Supposons qu'il existe une homotopie $h: X \times I \to X$ vérifiant*

(i) $h_0 = \mathrm{id}$,

(ii) $h_t(X) \subset A$ *pour tout* $t > 0$.

(iii) h *est fermée au-dessus de* $X\backslash A$.

Alors, si A est une Σ^∞-variété, X est homéomorphe à A.

Démonstration. Le rapporteur a fait remarquer que ce lemme se déduisait facilement du Théorème B.1 de [11]. La démonstration qui suit a cependant l'avantage de s'appliquer à toutes les variétés modelées sur un ensemble $\mathscr{C}$-absorbant Ω (au sens de [2]), où $\mathscr{C}$ est une classes topologique additive héréditaire pour les fermés et les ouverts, même quand Ω ne vérifie pas les hypothèses du Théorème B.1 de [11].

Puisque A est un rétracte absolu de voisinage, l'existence de h entraîne que X en est un aussi (appliquer le Théorème 6.3, pp. 139–140 de [6]). Puisque l'inclusion de A dans X est évidemment une équivalence homotopique fine, il suffit (voir [2, §5]) de montrer que X vérfie les conditions (C1) et (C2) du Lemme 2.1.

Soient C un espace appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, E un fermé de C, $f: C \to X$ une fonction continue dont la restriction à E est un Z-plongement, et $\mathscr{U}$

un recouvrement ouvert de X. Soit $\mathscr{V}$ un recouvrement ouvert de X tel que $\mathrm{St}(\mathscr{V})$ soit plus fin que $\mathscr{U}$. D'après le Lemme 1.1 de [2], nous pouvons trouver une fonction $k\colon C \to X$, $\mathscr{V}$-proche de f, vérifiant (a) $k|E = f|E$, (b) $k(C\backslash E) \subset A$, et (c) k est fermée au-dessus de $X\backslash A$.

Pour x dans A, soit $\varepsilon_x = \frac{1}{4}d(x, X\backslash A)$; soit $\mathscr{B} = \{B(x, \varepsilon_x)/x \in A\}$, et soit $\mathscr{V}_1$ un recouvrement ouvert de A plus fin que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{B}$. Soient $C' = C\backslash(E \cap f^{-1}(X\backslash A))$ et $E' = C' \cap E = E \cap f^{-1}(A)$. Puisque C' est ouvert dans C, il appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$. De plus, $k(E') = f(E') = f(E) \cap A$ est un Z-ensemble dans A puisque A est ouvert dans X, et $k|E'$ est un plongement de E' sur $k(E')$. Puisque A est une Σ^∞-variété, il a la propriété (C1), donc il existe un Z-plongement g' de C' dans A qui est $\mathscr{V}_1$-proche de $k|C'$ et vérifie $g'|E' = k|E' = f|E'$. Définissons $g\colon C \to X$ par $g|C' = g'$ et $g(x) = k(x) = f(x)$ si $x \in C\backslash C' = E\backslash E'$.

Puisque g' est $\mathscr{V}_1$-proche, donc $\mathscr{B}$-proche, de $k|C'$, il est facile de voir que, pour toute suite $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ de points de C, $d(g(c_n), X\backslash A)$ tend vers zéro si, et seulement si, $d(k(c_n), X\backslash A)$ tend vers zéro et qu'alors $d(g(c_n), k(c_n))$ tend vers zéro. La continuité de g aux points de $C\backslash C'$ résulte de cette remarque et de la continuité de k. De plus, g est $\mathscr{V}$-proche de k, donc $\mathscr{U}$-proche de f, et vérifie $g|E = k|E = f|E$.

Puisque g envoie C' injectivement dans A et $C\backslash C'$ injectivement dans $X\backslash A$, elle est injective. Pour montrer que c'est un plongement fermé, il suffit de prouver que, si $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de points de C telle que $\{g(c_n)\}$ converge vers un point x de X, alors $\{c_n\}$ converge vers un point c_0 tel que $g(c_0) = x$. Si x appartient à A, alors $g(c_n)$ est dans A pour n assez grand, et l'existence de c_0 résulte du fait que g' est un plongement fermé de C' dans A. Si x appartient à $X\backslash A$, il résulte d'une remarque précédente que $\{k(c_n)\}$ tend aussi vers x Puisque k est fermée au-dessus de $X\backslash A$, x appartient à l'image de k. Alors $k^{-1}(x)$ est réduit à un point x_0 de E et, puisque k est fermée au-dessus de $X\backslash A$, $\{c_n\}$ tend vers c_0.

Soit $\mathscr{G}$ un recouvrement ouvert de X. Il est facile de construire une fonction continue $\beta\colon X \to]0, 1]$ telle que la fonction $\varphi\colon X \to A$ définie par $\varphi(x) = h(x, \beta(x))$ soit $\mathscr{G}$-proche de id_X. Puisque $g'(C')$ est un Z-ensemble dans A, il y a une fonction continue ψ de A dans $A\backslash g'(C')$ qui est $\mathscr{G}$-proche de id_A. Alors $\psi \circ \varphi$ est $\mathrm{St}(\mathscr{G})$-proche de id_X et envoie X dans $A\backslash g'(C') \subset X\backslash g(C)$. Ceci prouve que $g(C)$ est un Z-ensemble dans X, donc que X vérifie la condition (C1).

Puisque A est une Σ^∞-variété, il vérifie la condition (C2), donc $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, où chaque A_n est un Z-ensemble au sens fort dans A. Posons $X_n = (X\backslash A) \cup A_n$. Alors $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ et, pour montrer que X vérifie la condition (C2), il suffit de prouver que, pour tout $n \geq 1$, le fermé X_n est un Z-ensemble au sens fort dans X. Soit $\mathscr{V}$ un recouvrement ouvert de X. Construisons une fonction continue $\beta\colon X \to]0, 1]$ telle que la fonction φ définie $\varphi(x) = h(x, \beta(x))$ soit $\mathscr{V}$-proche de id_X. Puisque h est fermée au-dessus de $X\backslash A$ et que $\beta(x) > 0$ pour tout x, la fermeture L de $\varphi(X)$ est disjointe de $X\backslash A$. Nous pouvons donc trouver un recouvrement ouvert $\mathscr{W}$ de X, plus fin que $\mathscr{V}$ et tel qu'aucun élément de $\mathrm{St}(\mathscr{W})$ ne rencontre à la fois L et $X\backslash A$. Puisque A_n est un Z-ensemble au sens fort dans A, il existe une fonction continue $\psi\colon A \to A$, $\mathscr{W}$-proche de id_A, telle que la fermeture de $\psi(A)$ relativement à

A soit disjointe de A_n. Puisqu'aucun élément de $\mathrm{St}(\mathscr{W})$ ne rencontre à la fois L et $X\backslash A$ et que ψ est $\mathscr{W}$-proche de id_A, $\mathrm{St}(X\backslash A, \mathscr{W})$ est un voisinage de $X\backslash A$ disjoint de $\psi(L)$. Soit $g = \psi \circ \varphi$; alors g est $\mathrm{St}(\mathscr{V})$-proche de id_X et $g(X) \subset \psi(L)$. Par suite, la fermeture de $g(X)$ relativement à X est disjointe de $X\backslash A$, donc est contenue dans la fermeture de $\psi(L)$ relativement à A; elle est donc aussi disjointe de A_n. Nous avons donc $\overline{g(X)} \cap X_n = \varnothing$, ce qui montre que X_n est un Z-ensemble au sens fort dans X et achève de vérifier la condition (C2), donc aussi le lemme.

Démonstration du Théorème 7.1. D'après le Théorème 1.1, $a(\mathring{M})$ est homéomorphe à $\mathring{M} \times \Sigma^\infty$. Puisque M est homéomorphe à un fermé de $\mathring{M}$, $a(M)$ est homéomorphe à un fermé de $a(\mathring{M})$, donc appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$. D'après les Lemmes 7.2 et 7.3, $a(M)$ et $a(\mathring{M})$ sont homéomorphes. Puisque M et $\mathring{M}$ ont le même type d'homotopie, $M \times \Sigma^\infty$ et $\mathring{M} \times \Sigma^\infty$ sont homéomorphes d'après le Lemme 2.5. Le théorème en résulte.

REFERENCES

1. M. Bestvina, P. Bowers, J. Mogilski and J. Walsh, *Characterization of Hilbert space manifolds revisited*, Topology Appl. **24** (1986), 53–69.
2. M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
3. R. Cauty, *L'espace des pseudo-arcs d'une surface*, Trans. Amer. Math. Soc. (a paraitre).
4. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.
5. D. W. Henderson, *Z-sets in ANR's*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 205–216.
6. S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich., 1965.
7. K. Kuratowski, *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. **17** (1931), 249–272.
8. S. Mazurkiewicz, *Sur l'ensemble des continus péaniens*, Fund. Math. **17** (1931), 273–274.
9. S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Dekker, New York, 1978.
10. H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.
11. ——, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 89–93.
12. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, vol. III, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1967.

UNIVERSITÉ PARIS VI, U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4, PLACE JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Current address: 22 rue Jouvenet, 75016, Paris, France