TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 343, Number 2, June 1994

UNE DICHOTOMIE DE HOPF POUR LES FLOTS GÉODÉSIQUES ASSOCIÉS AUX GROUPES DISCRETS D'ISOMÉTRIES DES ARBRES

M. COORNAERT ET A. PAPADOPOULOS

ABSTRACT. Let X be a complete locally compact metric tree and Γ a group of isometries of X acting properly on this space. The space of bi-infinite geodesics in X constitutes a space GX on which Γ acts properly. Let Ω be the quotient of GX by this action. The geodesic flow associated to Γ is the flow on Ω which is the quotient of the geodesic flow on GX, defined by the time-shift on geodesics. To any Γ-conformal measure on the boundary ∂X there is an associated measure m on Ω which is invariant by the geodesic flow. We prove the following results: The geodesic flow on (Ω, m) is either conservative or dissipative. If it is conservative, then it is ergodic, If it is dissipative, then it is not ergodic unless it is measurably conjugate to the action of $\mathbb{R}$ on itself by conjugation. We prove also a dichotomy in terms of the conical limit set $\Lambda_c \subset \partial X$ of Γ: the flow on (Ω, m) is conservative if and only if $\mu(\Lambda_c) = \mu(\partial X)$, and it is dissipative if and only if $\mu(\Lambda_c) = 0$. The results are analogous to results of E. Hopf and D. Sullivan in the case of Riemannian manifolds of constant negative curvature.

0. INTRODUCTION

Sur le fibré unitaire tangent à une surface de courbure constante -1, le flot géodésique est, pour la mesure de Liouville, ou bien ergodique, ou bien dissipatif (dichotomie de Hopf, cf. [Hop 2] et [Hop 3]). Cet énoncé a été étendu par Sullivan [Sul] au flot géodésique sur $T_1(\mathbb{H}^n)/\Gamma$, où $T_1(\mathbb{H}^n)$ désigne le fibré unitaire tangent à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, n quelconque ≥ 2, et où Γ est un groupe discret d'isométries de H^n. La mesure sur $T_1(\mathbb{H}^n)/\Gamma$ est ici la mesure associée à une mesure Γ-conforme de dimension $d \geq 0$ quelconque sur la sphère à l'infini S^{n-1} de $\mathbb{H}^n$. Rappelons qu'une mesure μ sur $\partial\mathbb{H}^n = S^{n-1}$ est dite Γ-conforme de dimension d si $\gamma^*\mu = |\gamma'|^d\mu$ ($\gamma^*\mu$ est la mesure définie par $\gamma^*\mu(A) = \mu(\gamma(A))$ pour tout borélien $A \subset S^{n-1}$). A toute mesure Γ-conforme est associée une mesure sur $T_1(\mathbb{H}^n)/\Gamma$ laissée invariante par le flot géodésique et vérifiant la dichotomie de Hopf. (La mesure de Lebesgue sur S^{n-1} est Γ-conforme de dimension $n-1$ et la mesure qui lui est associée est la mesure de Liouville : on retrouve l'énoncé original de Hopf.)

Soit maintenant X un arbre métrique complet et localement compact et Γ un groupe d'isométries de X agissant proprement sur X. Notons GX

Received by the editors May 27, 1992 and, in revised form, March 5, 1993.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58F11; Secondary 28D10, 58F15, 58F25.

l'ensemble des géodésiques $g: \mathbb{R} \to X$ et Ω le quotient de GX par l'action de Γ. Le flot sur GX obtenu par décalage du temps (translation du paramétrage des géodésiques) descend sur Ω pour donner le *flot géodésique* associé à Γ. Dans [Coo], on définit la notion de mesure Γ-conforme de dimension d sur le bord de X et on associe à une telle mesure une mesure m sur Ω laissée invariante par le flot géodésique. On étend ici la dichotomie de Hopf au flot géodésique sur (Ω, m) :

Théorème A. *Le flot géodésique sur (Ω, m) est ou bien conservatif, ou bien dissipatif. S'il est conservatif, il est ergodique. S'il est dissipatif, le flot n'est pas ergodique, à moins qu'il ne soit mesurablement conjugué à l'action de $\mathbb{R}$ sur lui-même par translation ($\mathbb{R}$ étant muni d'une mesure égale à la mesure de Lebesgue à un facteur constant près).*

Le Théorème A est le résultat principal de cette note. Une fois le cadre placé, le plan de la démonstration suit celui des démonstrations des théorèmes de Hopf et de Sullivan. Nous remercions Vadim Kaimanovitch pour ses remarques et pour avoir simplifié notre démonstration initiale du Théorème A, ainsi que M. Emery et M.-O. Gebuhrer pour des remarques utiles.

1. Généralités en théorie ergodique

Considérons un espace topologique E localement compact et à base dénombrable. Soit τ un homéomorphisme de E. L'ensemble *ω-limite* d'un point x de E est l'ensemble $\omega(x) = \omega_\tau(x)$ des valeurs d'adhérence de la suite $(\tau^n(x))_{n \geq 0}$. L'ensemble *α-limite* $\alpha(x)$ de x est l'ensemble ω-limite de x pour τ^{-1}. Le point x est dit *ω-récurrent* (resp. *α-récurrent*) si $x \in \omega(x)$ (resp. $x \in \alpha(x)$), et le point x est dit *ω-divergent* (resp. *α-divergent*) si $\omega(x) = \varnothing$ (resp. $\alpha(x) = \varnothing$).

Soit maintenant m une mesure sur E invariante par τ (toutes les mesures considérées sont des mesures de Radon positives de masse totale non nulle, finie ou infinie). Le théorème de décomposition de Hopf (cf. [Hop 1, Satz 13.1] ou [Kre 2, Théorème 3.2]) affirme que E est réunion de deux sous-ensembles mesurables disjoints $C = C(\tau)$ et $D = D(\tau)$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(i) Il n'existe aucun sous-ensemble mesurable $A \subset C$ de mesure non nulle tel que les $\tau^n(A)$, $n \in \mathbb{Z}$, soient deux à deux disjoints.

(ii) Il existe un ensemble mesurable $W \subset D$ tel que D soit la réunion disjointe des $\tau^n(W)$, $n \in \mathbb{Z}$.

D'après le *théorème de récurrence de Poincaré* (voir par exemple [Kre 2, p. 17]), les points de C sont presque tous ω-récurrents. D'autre part, d'après le *théorème de divergence de Hopf* [Hop 1, Satz 13.2]), les points de D sont presque tous ω-divergents. Il en résulte en particulier que C et D sont uniques mod m. En fait, pour toute fonction $\rho \in L^1(m)$ presque partout strictement positive, on a

$$(1) \qquad C(\tau) = \left\{ x \in E \mid \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\tau^n(x)) = \infty \right\} \quad \operatorname{mod} m.$$

L'action de τ sur (E, m) est dite *conservative* (resp. *dissipative*) si $C = E$ mod m (resp. $D = E$ mod m).

Remarques. (1) Les propriétés (i) et (ii) donnent immédiatement $C(\tau^{-1}) = C(\tau)$ et $D(\tau^{-1}) = D(\tau)$ mod m. On déduit alors des théorèmes de Poincaré et de Hopf que presque tout point de C est à la fois α- et ω-récurrent et que presque tout point de D est à la fois α- et ω-divergent.

(2) Il est clair, à partir de la propriété (i) ci-dessus, que l'action de τ est toujours conservative si $m(E) < \infty$.

Soit maintenant φ un *flot* sur E, c'est-à-dire une application continue $\varphi: \mathbb{R} \times E \to E$ telle que $\varphi(0, x) = x$ et $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s+t, x)$ pour tous les $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in E$. On notera φ_t l'homéomorphisme de E défini par $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. L'ensemble *$\omega$-limite* (resp. *$\alpha$-limite*) pour le flot φ d'un point x de E est l'ensemble noté $\omega(x)$ (resp. $\alpha(x)$) des points y de E tels qu'il existe une suite (t_i) de réels avec $\lim(t_i) = \infty$ (resp. $-\infty$) et $\lim(\varphi_{t_i}(x)) = y$. Autrement dit, $\omega(x)$ (resp. $\alpha(x)$) est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\varphi_t(x)$ quand $t \to \infty$ (resp. $-\infty$). On dit que le point x est *ω-divergent* (resp. *α-divergent*) pour φ si $\omega(x) = \varnothing$ (resp. $\alpha(x) = \varnothing$). On dit enfin que le point x est *ω-récurrent* (resp. *α-récurrent*) si $x \in \omega(x)$ (resp. $x \in \alpha(x)$).

Supposons maintenant E muni en outre d'une mesure m *invariante* par le flot, c'est-à-dire telle que $(\varphi_t)_*(m) = m$ pour tout réel t.

Pour tout réel t, on peut considérer l'homéomorphisme $\varphi_t: E \to E$. On a alors la décomposition de Hopf $E = C(\varphi_t) \cup D(\varphi_t)$ relative à cet homéomorphisme. Cette décomposition ne dépend pas mod m du paramètre $t \neq 0$. En effet [Kre 1, Lemme 2.1], on voit facilement en utilisant (1) que pour tout $t \neq 0$ et pour toute fonction $\rho \in L^1(m)$ avec $\rho > 0$ presque partout :

$$C(\varphi_t) = \left\{ x \in E \mid \int_0^\infty \rho(\varphi_t(x)) dt = \infty \right\} \quad \operatorname{mod} m. \tag{2}$$

On a ainsi, pour un flot qui préserve une mesure m, une décomposition unique mod m, $E = C(\varphi) \cup D(\varphi)$, et les sous-ensembles $C(\varphi)$ et $D(\varphi)$ sont invariants par le flot. Comme pour le cas des homéomorphismes, on dira que le flot est *dissipatif* (resp. *conservatif*) si on a $E = D$ mod m (resp. $E = C$ mod m).

Remarques. (1) Il est clair que si le flot φ est *ergodique* (c'est-à-dire s'il n'existe pas de sous-ensemble mesurable $E' \subset E$ qui soit invariant par le flot, avec $m(E') > 0$ et $m(E - E') > 0$), ce flot est ou bien conservatif ou bien dissipatif.

(2) Dans [Kre 1], Krengel donne une classification des flots dissipatifs. Il démontre en particulier que si un flot (φ_t) est dissipatif, il est mesurablement conjugué à un flot (φ_t^*) défini sur un espace mesuré ayant la forme d'un produit $E^* = W \times \mathbb{R}$, muni d'une mesure produit, le facteur $\mathbb{R}$ étant muni de la mesure de Lebesgue, et l'action de (φ_t^*) étant de la forme

$$\varphi_t^*(w, x) = (w, x+t).$$

Ainsi, si l'espace mesuré W n'est pas réduit à un seul atome, le flot φ_t^* (et donc aussi le flot φ_t) n'est pas ergodique.

Comme pour le cas des homéomorphismes, presque tout point de $C(\varphi)$ est α- et ω-récurrent pour φ (théorème de récurrence de Poincaré), et presque tout point de $D(\varphi)$ est α- et ω-divergent pour φ (théorème de divergence de Hopf). En particulier, l'ensemble des points qui sont divergents dans un sens et récurrents dans l'autre est de mesure nulle. De même, si $m(E) < \infty$, on a, à partir des définitions, $E = C(\varphi) \bmod m$. Ainsi, si $m(E) < \infty$, presque tout point de E est α- et ω-récurrent.

Le théorème suivant est une généralisation due à E. Hopf du théorème ergodique de Birkhoff.

Théorème 1.1 (cf. [Hop 1] ou [Hop 2]). *Considérons comme ci-dessus un flot φ sur E, préservant une mesure m, et soient f et ρ deux fonctions dans $L^1(m)$, avec $\rho > 0$ presque partout et vérifiant*

$$\int_0^\infty \rho(\varphi_t(x))\,dt = \infty \quad \textit{pour presque tout } x \in E. \tag{3}$$

Alors la limite

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int_0^u f(\varphi_t(x))\,dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x))\,dt} = f^*(x)$$

existe presque partout, et la fonction $f^*(x)$ est mesurable et invariante par le flot.

De plus, la fonction produit ρf^* est dans $L^1(m)$, et pour toute fonction h mesurable bornée et φ-invariante, on a

$$\int_E \rho f^* h = \int_E f h. \tag{4}$$

Enfin, pour une fonction ρ fixée, le flot est ergodique si et seulement si pour toute fonction f, la fonction f^* qui lui est associée est constante presque partout. □

Remarques. (1) D'après (2), si le flot est conservatif, alors toute fonction $\rho \in L^1(m)$ qui est > 0 presque partout vérifie l'hypothèse (3) du théorème.

(2) Dans le cas où $m(E) < \infty$, on a vu que le flot est conservatif. En prenant $h \equiv 1$ et $\rho \equiv 1$ dans le théorème ci-dessus, on obtient le théorème ergodique de Birkhoff.

(3) Comme le signale Hopf dans [Hop 2], on voit en considérant le flot (φ_{-t}) que la limite

$$\lim_{u\to-\infty} \frac{\int_0^u f(\varphi_t(x))\,dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x))\,dt} = f_*(x)$$

est définie presque partout, et que la fonction f_* est mesurable et invariante par le flot, et satisfait la relation (4) dans laquelle on remplace f^* par f_*. D'où $\int_E \rho(f^* - f_*)h = 0$, et en prenant $h = \operatorname{sign}(f^* - f_*)$, on obtient $f^*(x) = f_*(x)$ pour presque tout x dans E.

(4) En prenant $h \equiv 1$ dans (4), on voit que si f^* est constante presque partout, cette constante vaut $\int_E f / \int_E \rho$.

2. Arbres métriques et dilatation d'une isométrie au bord d'un arbre

Etant donné un espace métrique E, on utilisera (en suivant Gromov) la notation $|x-y|_E$ ou $|x-y|$ pour désigner la distance entre deux points x et y de E.

Une *géodésique* d'un espace métrique E est une application $g: I \to E$, I intervalle $\subset \mathbb{R}$, telle que $|g(t_1)-g(t_2)| = |t_1-t_2|$ pour tous les t_1, $t_2 \in I$. Si $I=[a, b]$ (resp. $[0, \infty[$), on dira que la géodésique $g: I \to E$ est un *segment géodésique* (resp. un *rayon géodésique*). On commettra parfois l'abus consistant à identifier une géodésique à son image. On dit que l'espace métrique E est un *arbre métrique* si deux points quelconques x et y de E sont reliés par un unique segment topologique (un *segment topologique* étant un sous-ensemble de E homéomorphe à un segment de $\mathbb{R}$) et si cet unique segment topologique reliant x à y, que l'on notera $[x, y]$, est (l'image d') un segment géodésique.

Dans tout ce qui suit, X sera un arbre métrique complet et localement compact. On notera que les boules fermées de X sont compactes. Soit ∂X le bord de X, c'est-à-dire l'ensemble des rayons géodésiques $r : [0, \infty[\to X$ modulo l'identification de deux rayons géodésiques r_1 et r_2 s'il existe des réels $t_1, t_2 \geq 0$ tels que $r_1(t_1+t) = r_2(t_2+t)$ pour tout $t \geq 0$. On note $r(\infty)$ le point de ∂X représenté par le rayon géodésique r. Si $g: \mathbb{R} \to X$ est une géodésique, on note $g(\infty)$ et $g(-\infty)$ les points de ∂X représentés respectivement par les rayons géodésiques $(g(t))_{t\geq 0}$ et $(g(-t))_{t\geq 0}$.

Rappelons que si ξ est un point quelconque de ∂X et x_0 un point quelconque de X, il existe un unique rayon géodésique $r: [0, \infty[\to X$ tel que $r(0)=x_0$ et $r(\infty)=\xi$. L'application qui associe à un rayon géodésique son point à l'infini définit une bijection de l'ensemble des rayons géodésiques issus de x_0 sur ∂X. Si ξ_1 et ξ_2 sont deux points quelconques de ∂X, il existe une géodésique $g: \,]-\infty, \infty[\to X$, unique au paramétrage près, vérifiant $g(-\infty)=\xi_1$ et $g(\infty)=\xi_2$.

Fixons un point base x_0 de X. On définit une métrique sur $X \cup \partial X$ de la manière suivante: Soient x et y deux points de $X \cup \partial X$, et L la longueur du trajet commun aux géodésiques issues de x_0 et d'extrémités respectives x et y (voir Figure 1). On définit alors la distance $|x-y|'$ par la formule

$$|x-y|' = |x-y|'_{x_0} = e^{-L} - \tfrac{1}{2}(e^{-|x|}+e^{-|y|}),$$

en posant

$$\begin{aligned} |x| &= |x_0 - x| \quad \text{si } x \in X, \\ &= \infty \quad \text{si } x \in \partial X. \end{aligned}$$

On montre que l'espace $X \cup \partial X$ est compact pour cette métrique, et que la topologie ainsi définie sur cet espace ne dépend pas du choix du point base x_0. De plus, la topologie induite par $|\ |'_{x_0}$ sur X est la topologie originale de l'arbre, et X est un ouvert dense de $X \cup \partial X$. La métrique sur ∂X induite par $|\ |'_{x_0}$ s'appelle la *métrique visuelle relative à* x_0. Elle est donnée par la formule

$$|\xi-\eta| = |\xi-\eta|_{x_0} = e^{-L}$$

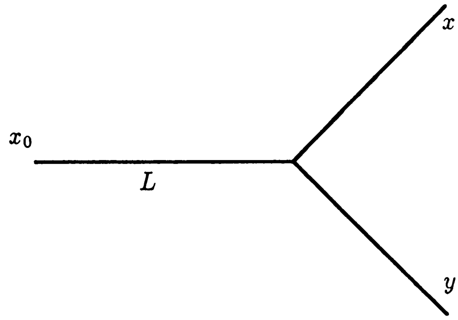

FIGURE 1

pour tout ξ et $\eta \in \partial X$, L étant ici la longueur du trajet commun aux rayons géodésiques allant de x_0 à ξ et η. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [Gro] et [CDP] où ces notions de métrique et de topologie sont étudiées en détail dans un cadre plus général (celui des espaces métriques hyperboliques au sens de Gromov).

Le groupe $\operatorname{Isom}(X)$ des isométries de X agit par composition à gauche sur l'ensemble des rayons géodésiques de X et cette action passe au quotient pour donner une action continue de $\operatorname{Isom}(X)$ sur ∂X. Etant donné une isométrie γ de X, posons, pour tout $\xi \in \partial X$,

$$j_\gamma(\xi) = j_{\gamma, x_0}(\xi) = e^{|x_0 - p| - |\gamma^{-1}x_0 - p|},$$

où p désigne la *projection* de ξ sur le segment $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$, c'est-à-dire le point à partir duquel le rayon géodésique issu de x_0 et allant vers ξ quitte le segment $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. La fonction j_γ est localement constante (et donc continue) sur ∂X et décrit la dilatation locale qu'impose γ à la métrique visuelle sur ∂X (cf. [Coo, §3]). Plus précisément, pour tout point ξ de ∂X, on peut trouver un voisinage V de ce point tel que pour tous les $\eta_1, \eta_2 \in V$, avec $\eta_1 \neq \eta_2$, on a

$$j_\gamma(\xi) = \frac{|\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|}{|\eta_1 - \eta_2|}.$$

3. MESURES CONFORMES SUR LE BORD

Soit maintenant Γ un groupe d'isométries de X agissant *proprement* sur cet espace (i.e., pour tout compact $K \subset X$, on a $\gamma K \cap K = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$). Notons que la situation considérée est plus générale que celle où X est le revêtement universel d'un graphe et Γ le groupe d'automorphismes de ce revêtement. (Γ peut avoir de la torsion, e.g., le groupe des isométries d'une droite engendré par les symétries autour de deux points de cette droite.)

Soit μ une mesure sur ∂X et d un réel ≥ 0. On dit que μ est une mesure Γ-*conforme* de dimension d si pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma^*\mu = j_\gamma^d \mu$, où $\gamma^*\mu$ est la mesure définie par $\gamma^*\mu(A) = \mu(\gamma A)$.

Considérons l'*exposant critique* de Γ défini par

$$e(\Gamma) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log\left(n_Y(R)\right),$$

où $n_Y(R)$ désigne le nombre de points d'une orbite fixée Y de Γ situés à distance $\leq R$ du point base. On montre (voir [Coo]) que s'il existe une mesure Γ-conforme de dimension d, alors $e(\Gamma) \leq d$, ce qui impose en particulier à Γ d'être d'exposant critique fini. De plus, pour $e(\Gamma)$ fini, il existe une mesure Γ-conforme de dimension $e(\Gamma)$ sur ∂X. Par exemple, si X est l'arbre simplicial homogène d'ordre p (i.e., l'unique arbre simplicial dans lequel il y a p arêtes issues de chaque sommet), alors la mesure de Hausdorff d_0-dimensionnelle sur ∂X, où $d_0 = \log(p-1)$, est Γ- conforme de dimension d_0 pour tout groupe Γ.

Considérons maintenant l'ensemble $\partial^2 X$ défini par

$$\partial^2 X = \{(\xi, \eta) \in \partial X \times \partial X \text{ avec } \xi \neq \eta\}.$$

On fait agir le groupe Γ sur $\partial^2 X$ par la formule $\gamma(\xi, \eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$. Une mesure Γ-conforme sur ∂X permet de définir une mesure Γ-invariante sur $\partial^2 X$. Plus précisément, on a la

Proposition 3.1 (cf. [Coo, §9]). *Si μ est une mesure Γ-conforme de dimension d sur ∂X, alors*

$$\nu = \mu \times \frac{m}{|\xi - \eta|^{2d}}$$

est une mesure Γ-invariante sur $\partial^2 X$. (Ici, $|\xi - \eta|$ désigne la distance visuelle entre les points ξ et η de ∂X.)

4. Le flot géodésique

Soit GX l'ensemble des géodésiques $g\colon \mathbb{R} \to X$. On munit GX de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$. Cette topologie est induite par la métrique suivante:

$$|g_1 - g_2| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g_1(u) - g_2(u)|}{2e^{|u|}} du.$$

On notera que l'inégalité triangulaire donne

$$|g_1(0) - g_2(0)| - 2|u| \leq |g_1(u) - g_2(u)| \leq |g_1(0) - g_2(0)| + 2|u|$$

et donc, après intégration, l'encadrement

$$|g_1(0) - g_2(0)| - 2 \leq |g_1 - g_2| \leq |g_1(0) - g_2(0)| + 2. \tag{5}$$

Le *flot géodésique* φ associé à X est le flot sur GX défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $g \in GX$ par $\varphi_t(g) = g_t$, où $g_t\colon \mathbb{R} \to X$ est la géodésique définie par la formule $g_t(u) = g(u+t)$, $u \in \mathbb{R}$.

Si t_1 et t_2 sont des réels, et $g\colon \mathbb{R} \to X$ un élément de GX, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_{t_1}(g) - \varphi_{t_2}(g)| &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(u+t_1) - g(u+t_2)|}{2e^{|u|}} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t_1 - t_2|}{2e^{|u|}} du = |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

ce qui montre que la ligne de flot $t \to \varphi_t(g)$ définit une géodésique dans GX.

L'application π qui à un élément g de GX associe le couple $\big(g(-\infty), g(\infty)\big)$ de ses points à l'infini définit une fibration triviale $GX \to \partial^2 X$ de fibre $\mathbb{R}$. L'application $H = H_{x_0}\colon GX \to \partial^2 X \times \mathbb{R}$ définie par

$$H(g) = (g(-\infty), g(\infty), s),$$

où s est tel que $g(-s)$ est la projection du point base x_0 sur l'image de g, est une trivialisation de π. L'image par H du flot géodésique est le flot (ψ_t) donné par la formule

$$\psi_t(\xi_1, \xi_2, s) = (\xi_1, \xi_2, s+t), \quad \text{pour tout } (\xi_1, \xi_2) \in \partial^2 X \text{ et } s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Si x_1 est un autre point base pour X, on a, pour tout $(\xi_1, \xi_2, s) \in \partial^2 X \times \mathbb{R}$, la formule de “changement de carte”

$$H_{x_1} \circ H_{x_0}^{-1}(\xi_1, \xi_2, s) = (\xi_1, \xi_2, s - [x_0, x_1, \xi_1, \xi_2]),$$

où $[x_0, x_1, \xi_1, \xi_2] = \pm|p_0 - p_1|$ est la distance entre les projections respectives p_0 et p_1 des points x_0 et x_1 sur la géodésique $]\xi_1, \xi_2[$, distance comptée positivement si les géodésiques orientées $]\xi_1, \xi_2[$ et $[p_0, p_1]$ vont dans le même sens, et négativement sinon. Dans la Figure 2, les cas (a), (b), et (c) représentent respectivement les cas $[x_0, x_1, \xi_1, \xi_2] > 0$, $[x_0, x_1, \xi_1, \xi_2] = 0$, et $[x_0, x_1, \xi_1, \xi_2] > 0$.

Notons que l'action d'une isométrie γ de X se lit dans la carte H_{x_0} par la formule

$$\gamma(\xi_1, \xi_2, s) = (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2, s - [x_0, \gamma^{-1}x_0, \xi_1, \xi_2]). \tag{7}$$

Soit μ une mesure Γ-conforme de dimension d sur ∂X et ν la mesure Γ-invariante sur $\partial^2 X$ qui lui est associée par la Proposition 3.1. Notons ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Les formules (6) et (7) montrent que la mesure produit $\nu \times \ell$, définie sur $\partial^2 X \times \mathbb{R}$, est invariante pour le flot (ψ_t) et pour l'action de Γ. Il en résulte que la mesure $\bar{m} = (H_{x_0}^{-1})_*(\nu \times \ell)$ sur GX est laissée invariante par le flot géodésique et par l'action de Γ.

Le groupe Γ agit isométriquement sur GX. Cette action est propre (utiliser le fait que l'application de GX dans X qui à l'élément $g \in GX$ associe le point $g(0) \in X$ est continue et Γ-équivariante). L'espace quotient $\Omega = GX/\Gamma$ est muni d'une métrique quotient et du flot induit par (φ_t). On notera encore (φ_t) ce flot sur Ω. Un point $x \in \Omega$ s'interprète comme un chemin $x : \mathbb{R} \to X/\Gamma$ (qui n'est pas nécessairement géodésique). Le flot sur Ω, qui s'appelle le *flot géodésique associé à* Γ, laisse invariante une “mesure quotient” m induite sur Ω par la mesure $\bar{m}$ sur GX. On notera l'inégalité $m(p(A)) \leq \bar{m}(A)$ pour tout borélien $A \subset GX$.

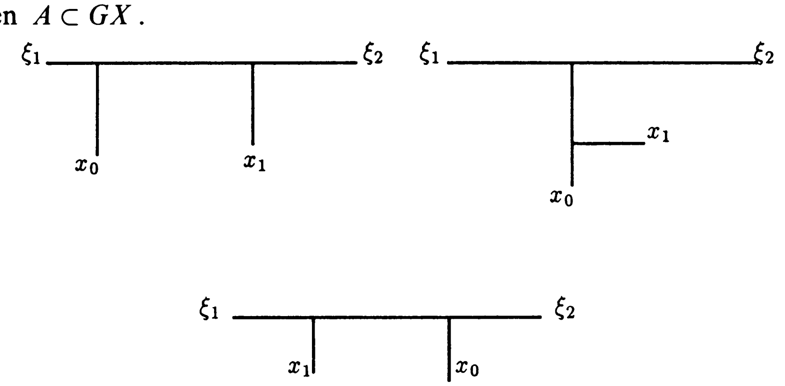

FIGURE 2

Le flot géodésique sur GX et sur Ω possède une structure analogue à celle des flots d'Anosov sur les variétés lisses, structure qui sera utile dans l'étude des propriétés ergodiques du flot. Nous introduisons, par analogie avec le cas lisse, les notions de variété stable et instable associées aux points de GX

Soit $g: \mathbb{R} \to X$ une géodésique dans X. La *variété stable forte* de g, notée $E_{ss}(g)$, est le sous-ensemble de GX formé des géodésiques $g': \mathbb{R} \to X$ vérifiant la condition suivante:

$$\exists u_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall u \geq u_0,\ g'(u) = g(u).$$

De même, la *variété instable forte* de g, notée $E_{uu}(g)$, est l'ensemble des géodésiques $g': \mathbb{R} \to X$ vérifiant la condition suivante:

$$\exists u_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall u \leq u_0,\ g'(u) = g(u).$$

La *variété stable* (resp. *instable*) de g, notée $E_s(g)$ (resp. $E_u(g)$), est la réunion des orbites par le flot des ensembles $E_{ss}(g)$ (resp. $E_{uu}(g)$). En d'autres termes, on a

$$E_s(g) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(E_{ss}(g)) = \{g' \in GX \mid g'(\infty) = g(\infty)\},$$

et

$$E_u(g) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(E_{uu}(g)) = \{g' \in GX \mid g'(-\infty) = g(-\infty)\}.$$

Proposition 4.1. *Soit g un élément quelconque de GX. Pour tout $g' \in E_{ss}(g)$, on a $|\varphi_t(g) - \varphi_t(g')| \to 0$ quand $t \to \infty$, et pour tout $g'' \in E_{uu}(g)$, on a $|\varphi_t(g) - \varphi_t(g'')| \to 0$ quand $t \to -\infty$.*

DÉMONSTRATION. On a

$$|\varphi_t(g) - \varphi_t(g')| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(u+t) - g'(u+t)|}{2e^{|u|}}\, du.$$

Soit g' un élément de $E_{ss}(g)$, et soit u_0 un réel tel que pour tout $u \geq u_0 - t$, on a $g(t+u) - g'(t+u) = 0$.

On peut alors écrire

$$|\varphi_t(g) - \varphi_t(g')| = \int_{-\infty}^{u_0-t} \frac{|g(u+t) - g'(u+t)|}{2e^{|u|}}\, du.$$

Pour t assez grand, on a $u_0 - t \leq 0$, et on peut alors écrire :

$$|\varphi_t(g) - \varphi_t(g')| = \int_{-\infty}^{u_0-t} \frac{|g(u+t) - g'(u+t)|}{2e^{-u}}\, du.$$

Par définition du réel u_0, on a, pour tout $u \leq u_0$,

$$|g(t+u) - g'(t+u)| = |g(t+u) - g(t+u_0)| + |g'(t+u) - g'(t+u_0)| = 2(u_0 - u).$$

D'où

$$|\varphi_t(g) - \varphi_t(g')| = \int_{-\infty}^{u_0-t} \frac{2(u_0 - u)}{2e^{-u}}\, du = (1+t)e^{u_0-t}.$$

Ainsi, $|\varphi_t(g) - \varphi_t(g')| \to 0$ quand $t \to \infty$.

Pour les points g'' dans $E_{uu}(g)$, la démonstration est la même. □

Si g est un point quelconque de GX et γ une isométrie de X, agissant sur GX, γ envoie la variété stable (resp. stable forte, instable, instable forte) de g sur la variété stable (resp. stable forte, instable, instable forte) de γg. Soit maintenant $x \in \Omega = GX/\Gamma$ et g un relevé de x dans GX. On dira que le point x' de Ω appartient à la variété stable (resp. stable forte, instable, instable forte) de x s'il existe un relevé g' de x' dans GX tel que g' appartienne à la variété stable (resp. stable forte, instable, instable forte) de g. On note $E_s(x)$, (resp. $E_{ss}(x)$, $E_u(x)$, $E_{uu}(x)$) la variété stable (resp. stable forte, instable, instable forte) de x. La Proposition 4.1 donne immédiatement le

Corollaire 4.2. *Soit x un élément quelconque de Ω. Pour tout $x' \in E_{ss}(x)$, on a $|\varphi_t(x) - \varphi_t(x')| \to 0$ quand $t \to \infty$, et pour tout $x'' \in E_{uu}(x)$, on a $|\varphi_t(x) - \varphi_t(x'')| \to 0$ quand $t \to -\infty$.*

5. L'ensemble limite conique

Soient $Y \subset X$ une orbite de Γ et ξ un point de ∂X. Considérons un rayon géodésique $r: [0, \infty[\to X$ tel que $r(\infty) = \xi$. On dit que ξ est un *point limite conique* de Γ s'il existe une suite de points dans Y qui converge vers ξ en restant à une distance bornée de r. Cette définition ne dépend ni de l'orbite $Y \subset X$ de Γ ni du rayon géodésique r d'extrémité ξ que l'on a choisis. L'ensemble Λ_c des points limites coniques de Γ est un sous-ensemble Γ-invariant de l'ensemble limite Λ (on rappelle que l'ensemble limite Λ est l'ensemble des points d'accumulation dans ∂X d'une orbite $Y \subset X$ quelconque de Γ). On a facilement la proposition suivante, dans laquelle les métriques intervenant sur $\Omega = GX/\Gamma$ et sur X/Γ sont les métriques quotients.

Proposition 5.1. *Soit $g \in GX$ une géodésique de X. Soit x l'image de g dans $\Omega = GX/\Gamma$. Fixons un point quelconque $a \in \Omega$ et un point quelconque $p \in X/\Gamma$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *x est ω-divergent (resp. α-divergent) pour le flot géodésique.*
(ii) *$|\varphi_t(x) - a|_\Omega \to \infty$ quand $t \to \infty$ (resp. $-\infty$).*
(iii) *$|x(t) - p|_{X/\Gamma} \to \infty$ quand $t \to \infty$ (resp. $-\infty$).*
(iv) *$g(\infty)$ (resp. $g(-\infty)$) n'est pas un point limite conique.*

Démonstration. D'après les définitions données au §1, dire que le point x est ω-divergent (resp. α-divergent) pour le flot géodésique (φ_t), c'est dire que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un réel T tel que $\varphi_t(x) \notin K$ pour tout $t \geq T$ (resp. pour tout $t \leq T$). Puisque tout compact est borné, on a (ii) $\Rightarrow$ (i). D'autre part, le théorème d'Ascoli montre que la métrique sur GX est propre, c'est-à-dire que les boules fermées sont compactes. Il en résulte que la métrique sur Ω est propre elle aussi, d'où (i) $\Rightarrow$ (ii). Le fait que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes se déduit de l'encadrement (5) du §4. L'équivalence de (iii) et (iv) résulte immédiatement de la définition des points limites coniques. □

Théorème 5.2. *On a $\mu(\Lambda_c) = 0$ ou alors $\mu(\Lambda_c) = \mu(\partial X)$. Si $\mu(\Lambda_c) = 0$, le flot géodésique sur (Ω, m) est dissipatif. Si $\mu(\Lambda_c) = \mu(\partial X)$, le flot géodésique sur (Ω, m) est conservatif.*

Démonstration. Comme on l'a fait remarquer au §1, l'ensemble A des points de Ω qui sont ω-divergents mais non-α-divergents est de m-mesure nulle.

Puisque Γ est dénombrable, on en déduit $\bar{m}(\bar{A}) = 0$ où $\bar{A}$ est l'ensemble des géodésiques $g \in GX$ telles que $g(-\infty) \in \Lambda_c$ et $g(\infty) \in \partial X - \Lambda_c$. Il en résulte que $\Lambda_c \times (\partial X - \Lambda_c)$ est de ν-mesure nulle. Comme la restriction de $\mu \times \mu$ à $\partial^2 X$ est absolument continue par rapport à ν, on a

$$\mu \times \mu\big(\Lambda_c \times (\partial X - \Lambda_c)\big) = \mu(\Lambda_c)\mu(\partial X - \Lambda_c) = 0,$$

et donc $\mu(\Lambda_c) = 0$ ou $\mu(\Lambda_c) = \mu(\partial X)$.

Supposons $\mu(\Lambda_c) = 0$. Soit G_1 l'ensemble des géodésiques $g \in GX$ dont la projection dans Ω est un point ω-récurrent. Toute géodésique $g \in G_1$ vérifie $g(\infty) \in \Lambda_c$ d'après la proposition précédente. En utilisant maintenant le fait que la mesure ν est absolument continue par rapport à la restriction de $\mu \times \mu$ à $\partial^2 X$, on en déduit $\bar{m}(G_1) = 0$. Il en résulte que l'ensemble des points de Ω qui sont ω-récurrents est de m-mesure nulle. Par le théorème de récurrence de Poincaré (cf. §1 ci-dessus), le flot géodésique est donc dissipatif.

De manière analogue, si l'on suppose maintenant $\mu(\Lambda_c) = \mu(\partial X)$, l'ensemble des éléments de GX qui se projettent en un point ω-divergent de Ω est de $\bar{m}$-mesure nulle. Il en résulte que l'ensemble des points de Ω qui sont ω-divergents est de m-mesure nulle et donc, d'après le théorème de divergence de Hopf (cf. §1), que le flot géodésique est conservatif. □

6. Ergodicité des flots géodésiques conservatifs

Nous allons montrer que si le flot géodésique sur (Ω, m) est conservatif, alors il est ergodique. Pour cela, on va appliquer le critère d'ergodicité donné par le Théorème 1.1, et on commence par définir une fonction ρ convenable (en suivant les notations du Théorème 1.1). Cette fonction sera une adaptation, au cas des arbres, de la fonction utilisée par Sullivan dans [Sul].

Soit $x_0' \in X/\Gamma$ l'image du point base x_0 de X ; on prend x_0' comme point base de X/Γ. Pour tout élément $x\colon \mathbb{R} \to X/\Gamma$ de Ω, on définit $v(x) = |x_0' - x(0)|$, et la fonction $\rho : X/\Gamma \to \mathbb{R}$ comme $\rho = e^{-(2d+\epsilon)v}$ où ϵ est une constante > 0 que l'on fixe une fois pour toutes et d est, comme ci-dessus, la dimension conforme de la mesure μ sur ∂X.

Pour tout $r > 0$, considérons le sous-ensemble $B_r = v^{-1}([0, r])$ de Ω, et montrons d'abord le

Lemme 6.1. *Il existe une constante C telle que $m(B_r) \leq Cre^{2rd}$.*

Démonstration. Considérons le point base $x_0 \in X$ et une boule fermée $B(x_0, r)$ de rayon r centrée en ce point, et soit $G_r \subset GX$ l'ensemble des géodésiques $g\colon \mathbb{R} \to X$ telles que $g(0) \in B(x_0, r)$.

Nous allons majorer la quantité $\bar{m}(G_r)$. Pour cela, rappelons que la mesure $\bar{m}$, une fois choisi le point base x_0, s'écrit comme le produit de deux mesures, $\nu \times \ell$ (cf. §4 ci-dessus). Pour tout $g \in G_r$, la projection du point base x_0 sur g est contenu dans $B(x_0, r)$. La mesure ℓ (qui est la mesure de Lebesgue) de tout segment géodésique contenu dans cette boule est $\leq 2r$. D'autre part, pour toute géodésique $g\colon \mathbb{R} \to X$ qui rencontre la boule $B(x_0, r)$, si ξ et η désignent les points $g(-\infty)$ et $g(\infty)$, on a $|\xi - \eta| \geq e^{-r}$. Or, la mesure ν sur

$\partial^2 X$ est définie par la formule

$$\nu = \frac{\mu \times \mu}{|\xi - \eta|^{2d.}}$$

Si on désigne par M la masse totale de la mesure μ sur ∂X, on a donc

$$\bar{m}(G_r) \leq 2rM^2 e^{2rd}.$$

Comme l'image $p(G_r)$ de G_r dans Ω contient l'ensemble B_r, on a de même

$$m(B_r) \leq 2rM^2 e^{2rd},$$

ce qui démontre le lemme. □

Proposition 6.2. *La fonction* ρ *est* m*-intégrable.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \geq 0$, on va d'abord majorer l'intégrale de ρ sur le domaine $B_{n+1} - B_n \subset \Omega$. On a, par le Lemme 6.1,

$$m(B_{n+1} - B_n) \leq C(n+1)e^{2(n+1)d}.$$

D'autre part, sur ce même domaine, on a $v \geq n$, et donc $\rho \leq e^{-(2d+\epsilon)n}$.

Ainsi, on a

$$\int_{B_{n+1}-B_n} \rho \leq C(n+1)e^{2(n+1)d-(2d+\epsilon)n} = C(n+1)e^{2d-\epsilon n},$$

et l'intégrale de ρ sur Ω est majorée par une série convergente, et est donc finie. □

Théorème 6.3. *Si le flot géodésique sur* (Ω, m) *est conservatif, alors il est ergodique.*

DÉMONSTRATION. Nous appliquons le Théorème 1.1, en utilisant la fonction ρ que l'on vient de définir. Pour tout $f \in L^1(\Omega)$, considérons donc la fonction

$$f^*(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{\int_0^u f(\varphi_t(x))\,dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x))\,dt}$$

et montrons que cette fonction est constante presque partout sur Ω.

En fait, on peut se restreindre à un ensemble de fonctions f dense dans $L^1(\Omega)$ (voir [Nic, p. 143]). L'ensemble considéré sera celui des *fonctions cylindriques.* Une fonction f sur Ω est dite cylindrique s'il existe un réel $T \geq 0$ tel que $f(x) = f(x')$ si $x(t) = x'(t)$ pour tout $t \in [-T, T]$. Il est clair d'après la construction de la mesure m que l'ensemble des fonctions cylindriques est dense dans $L^1(\Omega)$. On notera que notre fonction ρ est cylindrique ($T = 0$ convient).

On suppose donc que la fonction f est cylindrique.

Montrons d'abord que f^* prend la même valeur en deux points x et $x' \in \Omega$ tels que x' appartient à la variété stable forte $E_{ss}(x)$. On se place en un point $x \in \Omega$ tel que l'on ait

$$\int_0^\infty \rho(\varphi_t(x))\,dt = \infty$$

et tel que l'expression $\int_0^u f(\varphi_t(x))\,dt / \int_0^u \rho(\varphi_t(x))\,dt$ ait une limite finie quand $u \to \infty$. Par le Théorème 1.1 et la Remarque 1 qui le suit, ces deux propriétés sont vérifiées par presque tout point x de Ω (c'est ici que l'on utilise que le flot est conservatif).

Soit donc $x' \in E_{ss}(x)$.

Considérons la différence

$$\frac{\int_0^u f(\varphi_t(x))\,dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x))\,dt} - \frac{\int_0^u f(\varphi_t(x'))\,dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x'))\,dt}.$$

On peut la réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^u f(\varphi_t(x))dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x))\,dt} & \frac{\int_0^u \left(\rho(\varphi_t(x')) - \rho(\varphi_t(x))\right)dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x'))\,dt} \\ & + \frac{\int_0^u \left(f(\varphi_t(x)) - f(\varphi_t(x'))\right)dt}{\int_0^u \rho(\varphi_t(x'))\,dt}. \end{aligned} \tag{8}$$

Comme les fonctions f et ρ sont cylindriques, les expressions

$$\int_0^u (f(\varphi_t(x') - f(\varphi_t(x)))\,dt$$

et

$$\int_0^u (\rho(\varphi_t(x') - \rho(\varphi_t(x)))\,dt$$

qui interviennent dans (8) sont constantes pour u assez grand. On en déduit

$$\int_0^\infty \rho(\varphi_t(x'))\,dt = \infty,$$

et que l'expression (8) tend vers 0 quand u tend vers l'infini. Cela montre que $f^*(x)$ prend la même valeur en des points x et x' tels que $x' \in E_{ss}(x)$. Comme la fonction f^* est invariante par le flot, elle prend auusi la même valeur en des points x et x' où $x' \in E_s(x)$.

La même démonstration montre que pour presque tout $x \in \Omega$, on a $f_*(x) = f_*(x')$ pour tout $x' \in E_u(x)$.

Soient maintenant $\bar{f}^*$ et $\bar{f}_*$ les fonctions sur GX définies par $\bar{f}^* = f^* \circ p$ et $\bar{f}_* = f_* \circ p$ (où p désigne comme avant la projection canonique de GX dans X). D'après ce qui précède, pour presque tout $g \in GX$, $\bar{f}^*$ (resp. $\bar{f}_*$) est constante sur $E_s(g)$ (resp. $E_u(g)$). D'autre part, les fonctions $\bar{f}^*$ et $\bar{f}_*$ sont invariantes par le flot géodésique et définissent donc des fonctions sur $\partial^2 X$, que l'on note respectivement Φ^* et Φ_*.

Pour tout $\xi, \eta \in \partial^2 X$, il existe une ligne du flot φ qui est négativement asymptote à η et positivement asymptote à ξ. On en déduit que pour presque tout $\xi \in \partial X$, Φ^* prend la même valeur sur l'ensemble $\xi \times (\partial X - \{\xi\})$. De la même manière, pour presque tout $\xi \in \partial X$, Φ_* prend la même valeur sur $(\partial X - \{\xi\}) \times \xi$. De plus, par la Remarque 3 qui suit le Théorème 1.1, on a $\Phi^* = \Phi_*$ presque partout sur $\partial^2 X$. Par un argument classique utilisant le théorème de Fubini, on peut montrer maintenant que la fonction Φ^* est constante presque partout sur $\partial^2 X$, et que la fonction f^* est donc elle-même aussi constante presque partout sur Ω (voir [Hop 3] et [Sul]). Cela démontre le Théorème 6.3. □

Corollaire 6.4. *Si* $m(\Omega) < \infty$, *le flot géodésique sur* (Ω, m) *est ergodique. En particulier, si l'action de* Γ *sur* X *est cocompacte, le flot géodésique est ergodique.*

DÉMONSTRATION. On sait (Remarque 2 après le Théorème 1.1) que si $m(\Omega) < \infty$, le flot sur Ω est nécessairement conservatif. Il suffit de remarquer maintenant que l'on a

$$X/\Gamma \text{ compact} \iff \Omega = GX/\Gamma \text{ compact}.$$

En effet, l'application de GX/Γ sur X/Γ qui à un chemin $x \in GX/\Gamma$ associe le point $x(0)$ est propre, d'après l'encadrement (5) au §4 ci-dessus. □

Nous terminons par un exemple qui montre que le flot géodésique peut être conservatif même dans le cas où $m(\Omega) = \infty$. Considérons pour cela le graphe simplicial infini Y représenté par la Figure 3. Le revêtement universel X de Y est l'arbre homogène d'ordre 3, et Y est donc le quotient de X par un groupe Γ d'isométries agissant de manière propre et libre sur X. Le bord ∂X est un espace de Cantor. On prend pour point base x_0 de X l'un de ses sommets et pour mesure μ la mesure de Hausdorff log 2-dimensionnelle sur ∂X, qui est Γ-conforme de dimension $\log 2$, comme on l'a signalé plus haut.

La mesure ν associée sur $\partial^2 X$ peut aussi être décrite de la manière suivante. Etant donnés deux sommets distincts x_1 et x_2 de X, notons $C(x_1, x_2)$ l'ensemble des $(\xi, \eta) \in \partial^2 X$ tels que la géodésique orientée $]\xi, \eta[$ passe d'abord par x_1 puis par x_2. Alors, après normalisation, ν est l'unique mesure sur $\partial^2 X$ telle que $C(x_1, x_2)$ ait pour masse $2^{|x_1 - x_2|}$ pour tous les sommets distincts x_1, x_2 de X.

Au paramétrage près, les éléments de $\Omega = GX/\Gamma$ sont les chemins simpliciaux bi-infinis sans aller-retour. En projetant verticalement l'échelle Y, on voit que le flot géodésique sur Y est conservatif si et seulement si une certaine marche sur $\mathbb{Z}$ est récurrente. Cette marche se fait de la manière suivante. A chaque instant $t \in \mathbb{Z}$, on peut avancer soit de 1 (un pas en avant), soit de 0 (sur place), soit de -1 (un pas en arrière). Si le pas à l'instant t est de 1 (resp. 0, resp. -1), on a, à l'instant $t+1$, une chance sur deux d'avancer de 1 (resp. 1, resp. -1) et une chance sur deux d'avancer de 0 (resp. -1, resp. 0). Si P_t est la position du marcheur à l'instant t, le couple (P_t, P_{t+1}) est une

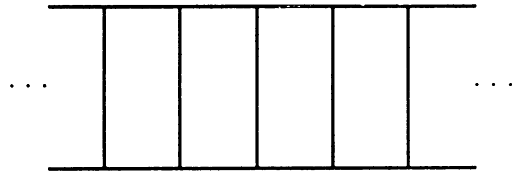

FIGURE 3

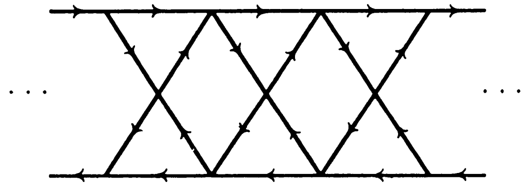

FIGURE 4

chaîne de Markov sur les droites $y = x$, $y = x + 1$, et $y = x - 1$ de $\mathbb{Z}^2$. Le graphe de transition de cette chaîne de Markov est décrit à la Figure 4.

Sur ce graphe, la probabilité de passer de l'origine à l'extrémité d'une arête orientée est $\frac{1}{2}$. Pour montrer que cette chaîne est récurrente, remarquons que partant d'un point quelconque situé sur $y = x$, la chaîne retourne sur cette droite avec une probabilité 1. On considère donc la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ induite par la chaine sur les points de la droite $x = y$. On voit que, partant d'un point de coordonnées (a, a), la probabilité d'un premier retour sur $y = x$ au point de coordonnées (b, b), $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, est $\tau(a, b) = 1/2^{|a-b|+1})$. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ associée aux probabilités de transition $\tau(a, b)$ est récurrente puisque τ est une fonction de $|a - b|$ à décroissance exponentielle (cf. [Spi]). La chaîne de Markov de la Figure 4 est donc récurrente. Il en résulte que le flot géodésique associé à Y est conservatif. On remarque enfin que l'échelle Y quotientée par l'action naturelle de $\mathbb{Z}$ donne le graphe fini de la Figure 5. On en déduit $m(\Omega) = \infty$ et $\Lambda(\Gamma) = \partial X$. On notera que $\Lambda_c(\Gamma)$ est distinct de $\Lambda(\Gamma)$. Par exemple, si $g \in GX$ se projette sur l'une des deux horizontales de l'échelle, l'image de g dans Ω est ω-divergente et donc $g(\infty) \notin \Lambda_c$. En fait, il est clair que $\Lambda - \Lambda_c$ n'est pas dénombrable.

Note. Vadim Kaimanovitch nous signale que l'ergodicité du flot dans l'exemple précédent découle aussi d'un résultat qu'il vient d'obtenir sur les propriétés ergodiques du flot géodésique dans un espace hyperbolique relativement à une mesure invariante associée à une mesure harmonique sur le bord de cet espace (voir [Kai]).

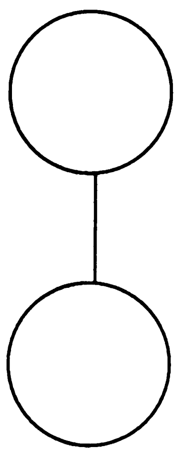

FIGURE 5

Bibliographie

[Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. Math. **159** (1993), 241–270.

[CDP] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Math., vol. 1441, Springer-Verlag, 1990.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in Group Theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., no. 8, Springer-Verlag, 1987, pp. 75–263.

[Hop 1] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Ergeb. Math., Band 5, no. 2, Springer-Verlag, 1937.

[Hop 2] ———, *Statistik der geodätischen Linien in Manigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939), 261–304.

[Hop 3] ———, *Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 863–877.

[Kai] V. Kaimanovitch, *Ergodicity of harmonic invariant measures for geodesic flows on hyperbolic spaces,* prépubliclation, Univ. de Strasbourg, 1993.

[Kre 1] U. Krengel, *Darstellungssätze für Strömungen und Halbströmungen* I, Math. Ann. **176** (1968), 181–190.

[Kre 2] ———, *Ergodic theorems*, De Gruyter, 1985.

[Nic] P. J. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, LMS Lecture Note Series 143, Cambridge University Press, 1989.

[Spi] F. Spitzer, *Principles of random walk*, 2nd ed., Springer, 1976.

[Sul] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **50** (1979), 171–202.

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France