

COMPLEXES GALOISIENS

YVES LADEGAILLERIE

ABSTRACT. We construct special n -complexes categories which are the object of a Galois theory. Their topological supports are pseudo-manifolds which are branched coverings of spheres. They are a generalization in every dimension of hypercartes. Every category of Galois n -complexes is equivalent to a 2-complexes one. Reducing operations are introduced in dimensions two and three. It leads to a notion of irreducible complex which is used in three-dimensions for a simplified generation of 3-manifolds.

RÉSUMÉ. On construit des catégories de n -complexes simpliciaux particuliers qui sont l'objet d'une théorie galoisienne. Topologiquement, ce sont des pseudo-variétés revêtements ramifiés de sphères. En particulier, ce sont des généralisations des hypercartes aux dimension supérieures. Tout catégorie de n -complexes galoisiens est équivalente à une catégorie de 2-complexes. Des opérations de réduction sont introduites en dimensions deux et trois. Elles mènent à une notion de complexe irréductible qui est utilisée en dimension trois pour obtenir une génération simplifiée des 3-variétés.

0. INTRODUCTION

On étudie un type particulier de n -complexes simpliciaux, appelés ici *complexes galoisiens*, car ils sont l'objet d'une théorie galoisienne (cf. [4]). Un cas particulier de complexe galoisien est tout complexe obtenu par subdivision barycentrique d'un complexe ordinaire.

Les morphismes naturels sont des revêtements ramifiés; ces complexes sont tous des revêtements ramifiés de sphères. Le cadre topologique naturel de la théorie est celui des pseudo-variétés. La notion classique d'indice de ramification prend un sens général ici en termes de sous-groupe d'un certain groupe non abélien libre dont certains éléments sont fixés. On trouve des pseudo-variétés universelles "régulières" (le groupe des automorphismes du complexe est transitif) bien déterminées, dont toutes les autres sont des quotients par des sous-groupes d'automorphismes. Cela généralise formellement les groupes de triangles aux dimensions supérieures à deux. Cela étend également aux dimensions supérieures les notions de carte et d'hypercarte topologiques (cf. [3], [7]) et la partie algébrique de l'étude se place ainsi dans la ligne des travaux de A. Vince et D. J. Lynne (cf. [10], [16]).

Le cas de la dimension trois est particulièrement important, par le fait qu'on y aborde le domaine des 3-variétés, avec leurs problèmes spécifiques de génération et de classification. C'est aussi la première dimension où l'on voit pleinement fonctionner le principe fondamental qui lie toutes les dimensions supérieures à la dimension

Received by the editors December 20, 1997 and, in revised form, January 15, 1998.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57Q15, 57N10.

Key words and phrases. Complexes, coverings, 3-manifolds.

deux: toute catégorie de n -complexes simpliciaux galoisiens est équivalente à une catégorie de 2-complexes.

Mais surtout, à la différence des complexes simpliciaux ordinaires, les complexes galoisiens supportent des opérations de réduction très efficaces et très simples qui mènent à la notion de complexe irréductible. En dimension deux, cela conduit à des formes normales des surfaces (c'est d'ailleurs une façon extrêmement rapide de retrouver la classique classification des surfaces compactes). En dimension trois, cela mène à une génération simplifiée des 3-variétés. Cela ouvre de nombreux problèmes sur les complexes irréductibles de dimension trois: quels sont-ils exactement, à commencer par les complexes sphériques?

1. COMPLEXES GALOISIENS EN DIMENSION n

Les constructions données ci-dessous sont valides en toute dimension finie supérieure ou égale à un. Cependant, de façon évidente, certaines propriétés énoncées n'ont pas de sens en dimension un.

1.1. La catégorie des complexes galoisiens. Soit S_n^+ un n -simplexe standard affine orienté dont les $(n+1)$ sommets sont étiquetés $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$. Soit S_n^- le même simplexe muni de l'orientation opposée. S_n^+ sera qualifié de direct et S_n^- d'indirect. Un n -complexe galoisien \mathbf{C} est obtenu en recollant par leur faces des exemplaires S_i de S_n^+ et des exemplaires S_i' de S_n^- , indexés par un même ensemble au plus dénombrable \mathbf{I} , de façon à respecter les structures affines et les étiquetages des sommets, à inverser les orientations (le complexe résultant est donc orienté), de sorte que toute face de \mathbf{C} appartienne exactement à deux simplexes, l'un direct et l'autre indirect.

Lorsque le nombre de simplexes assemblés autour de chaque sommet (de *type* A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , ou A_n) est fini, on parlera de complexe localement fini, et de complexe fini lorsque le nombre total de simplexes est fini. Dans ces deux cas, un sommet A_i autour duquel sont recollés des n -simplexes S_k ($k = 1, 2, \dots, q$) a pour voisinage dans \mathbf{C} le recollement des n -simplexes s_k homothétiques de ces S_k dans l'homothétie de centre A_i et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme chacun des s_k est un cône de sommet A_i sur un $(n-1)$ -simplexe étiqueté (homothétique de la face opposée à A_i dans S_k), le voisinage en question est un cône de sommet A_i sur un $(n-1)$ -complexe galoisien fini. Il en résulte que le support topologique d'un n -complexe galoisien \mathbf{C} localement fini est une surface orientée en dimension deux, une 3-pseudo-variété orientée en dimension trois (i.e.: le voisinage de tout sommet est une 3-pseudo-boule, c'est à dire un cône sur une surface compacte orientable). En dimension supérieure n , c'est aussi une n -pseudo-variété orientée, en ce sens que tout sommet a pour voisinage une n -pseudo-boule c'est à dire un cône sur une $(n-1)$ -pseudo-variété compacte orientable.

On peut remarquer que tout n -complexe simplicial (au sens le plus large, incluant toutes les décompositions cellulaires en simplexes) induit trivialement un complexe galoisien en étiquetant A_0 les sommets, A_1 les milieux d'arêtes, A_2 les centres des 2-facettes, \dots, A_{n-1} les centres des faces, A_n les centres des simplexes.

Un morphisme $\theta: \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ de n -complexes galoisiens est une application continue de \mathbf{C}_1 sur \mathbf{C}_2 qui envoie tout simplexe sur un simplexe de même sens, en respectant les structures affines et les étiquetages. L'application est étale sur le complémentaire des $(n-2)$ -facettes: c'est un revêtement ramifié au dessus du

$(n-2)$ -squelette de \mathbf{C}_2 . Minus de ces morphismes, les n -complexes galoisiens forment une catégorie \mathbf{CG}_n .

1.2. Opérations de groupes. Equivalences de catégories.

1.2.1. Soit Ω^+ (respectivement Ω^-) l'ensemble des simplexes directs (respectivement indirects) d'un n -complexe galoisien \mathbf{C} et Ω la réunion des deux ensembles. Pour $i = 0, 1, \dots, n$ on note a_i la permutation de Ω qui à tout simplexe associe l'unique simplexe de sens opposé recollé sur lui par sa *face de type* i , c'est à dire $[A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_n]$. Ces permutations a_i échangent les éléments de Ω^+ et Ω^- . Ce sont des involutions sans point fixe de Ω . La connaissance de ces $(n+1)$ involutions détermine complètement le complexe puisqu'elles indiquent les recollements entre simplexes. Alors, si G_n est le groupe de présentation:

$$G_n : \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha_0^2 = \alpha_1^2 = \dots = \alpha_n^2 = 1\},$$

G_n opère sur Ω naturellement: il suffit d'associer respectivement a_0, a_1, \dots, a_n aux générateurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ de G_n . Cela munit Ω d'une structure de G_n -ensemble.

Inversement, la donnée d'une opération de G_n sur un ensemble au plus dénombrable Ω , réunion disjointe de deux sous ensembles Ω^+ et Ω^- de n -simplexes respectivement directs et indirects, de même cardinal, dans laquelle les générateurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont envoyés sur des involutions a_0, a_1, \dots, a_n de Ω qui échangent les éléments de Ω^+ et Ω^- , détermine des recollements autorisés et, par suite, un n -complexe galoisien.

Cette construction est fonctorielle: si $\theta: \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ est un morphisme de n -complexes galoisiens, il induit une application $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ entre les ensembles Ω_1 et Ω_2 de simplexes de \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 , application qui est un morphisme de G_n -ensembles. Cette propriété traduit la compactibilité de θ avec les recollements. Comme cette correspondance entre les morphismes des deux complexes et ceux des G_n -ensembles associés est bijective, le foncteur qu'on vient de mettre en évidence de la catégorie \mathbf{CG}_n dans la catégorie des G_n -ensembles est pleinement fidèle et réalise de ce fait une équivalence sur son image.

Remarque. On peut aussi représenter un complexe de ce type par un graphe coloré. Il suffit de prendre l'ensemble des simplexes pour ensemble de sommets et de relier systématiquement deux simplexes recollés par leur face de type q par une arête marquée q . Un représentation de ce type est utilisée par Ferri pour construire ses cristallisations (cf. [5]).

1.2.2. Dans G_n , les sous-groupe G_n^+ d'indice deux formé des éléments qui sont produit d'un nombre pair de générateurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ est un groupe non abélien libre de rang n engendré par les éléments $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ définis par: $\rho_i = \alpha_i \alpha_n$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Le groupe G_n est le produit semi-direct de G_n^+ par le sous-groupe d'ordre deux de G_n engendré par α_n qui opère sur $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ en les inversant.

A tout complexe \mathbf{C} est alors associé le G_n^+ -ensemble Ω^+ de ses simplexes directs sur lequel G_n^+ opère par restriction à G_n^+ de l'opération de G_n et restriction des permutations de Ω à des permutations de Ω^+ . Le foncteur introduit plus haut induit ainsi un foncteur f_n de la catégorie \mathbf{CG}_n des n -complexes galoisiens dans la catégorie \mathbf{GE}_n des G_n^+ -ensembles.

Théorème. f_n est une équivalence de catégories entre \mathbf{CG}_n et \mathbf{GE}_n .

Principe de la démonstration: l'existence d'un quasi-inverse de f_n découle de la possibilité, à partir d'une opération donnée de G_n^+ sur un ensemble au plus dénombrable Ω^+ , de construire un complexe \mathbf{C} dont l'ensemble des simplexes directs est Ω^+ , à bijection près, et tel que l'opération de G_n^+ sur l'ensemble des simplexes directs de \mathbf{C} est, modulo la bijection, l'opération de départ. Compte tenu de ce qu'on a vu en 1.2.1, il suffit pour cela d'étendre l'opération donnée en une opération du groupe entier G_n sur un ensemble Ω réunion disjointe de deux exemplaires de Ω^+ (le second étant noté Ω^-). Or, l'opération donnée est déterminée par la donnée des n permutations r_0, r_1, \dots, r_{n-1} associées respectivement aux n générateurs $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ de G_n^+ , et pour l'étendre, on peut utiliser la structure de produit semi-direct. Il faut construire les $(n+1)$ involutions de Ω ($\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$) associées aux $(n+1)$ générateurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ de G_n . On prend pour involution a_n la bijection naturelle $\Omega^+ \rightarrow \Omega^-$ entre les deux exemplaires de Ω^+ , étendue à Ω^- par son inverse. On construit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} en utilisant le fait que, vu les relations entre les générateurs des deux groupes, on doit avoir $r_i = a_i a_n$ pour $i = 0, 1, \dots, (n-1)$: comme r_0, r_1, \dots, r_{n-1} ne sont définies au départ que sur Ω^+ , cela ne détermine les a_0, a_1, \dots, a_{n-1} que sur Ω^- , mais chacune de ces applications bijectives de Ω^- sur Ω^+ ne possède qu'une unique extension en une involution de Ω échangeant Ω^+ et Ω^- : l'extension par son inverse sur Ω^+ . On vérifie sans difficulté que les $(n+1)$ involutions ainsi construites répondent au problème. La fonctorialité des constructions précédentes assur alors l'existence du foncteur quasi-inverse.

Remarque. Dans cette équivalence, les complexes finis (compacts) correspondent aux G_n^+ -ensembles finis, et les complexes connexes correspondent aux G_n^+ -ensembles homogènes.

1.3. **Objet final et indices de ramification.**

1.3.1. La catégorie des G_n^+ -ensembles possède un objet final: l'ensemble à un seul élément. Par l'équivalence f_n , il lui correspond le n -complexe galoisien constitué de l'unique n -simplexe direct S_n^+ et de l'unique n -simplexe indirect S_n^- recollés par toutes leurs faces étiquetées, pour former topologiquement une n -sphère S^n . On notera \mathbf{Ct}_n ce complexe et on le désignera par les termes de *complexe trivial* ou encore de *sphère canonique*. De l'équivalence de catégories, on déduit que tout n -complexe galoisien \mathbf{C} est revêtement de cette sphère canonique, ramifié au dessus du $(n-2)$ -squelette τ commun aux deux n -simplexes. C'est d'ailleurs une évidence, puisque l'unique morphisme $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ct}_n$ consiste à envoyer tout simplexe direct (respectivement indirect) de \mathbf{C} sur l'unique simplexe direct (respectivement indirect) de \mathbf{Ct}_n en respectant les structures.

1.3.2. *Indice de ramification au dessus des $(n-2)$ -facettes de \mathbf{Ct}_n .* On ne considère que des complexes localement finis.

Toute $(n-2)$ -facette f de type (i, j) (i.e., $f = [A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n]$) d'un n -complexe galoisien \mathbf{C} est intersection de toutes les faces $[A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n]$ et $[A_0, A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n]$ de types respectifs i et j , appartenant à tout simplexe de \mathbf{C} recollé autour de f . La permutation $r_{ij} = a_i a_j$ de Ω^+ associée à \mathbf{C} a, parmi ses différentes orbites, une orbite constituée par l'ensemble S_f des n -simplexes directs de \mathbf{C} qui contiennent f . Cet ensemble de simplexes est d'ailleurs muni d'un ordre circulaire par restriction de la permutation en question. L'unique morphisme $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ct}_n$ est un revêtement ramifié qui envoie tout simplexe direct de S_f sur l'unique simplexe direct du complexe trivial \mathbf{Ct}_n .

L'indice de ramification autour de la $(n-2)$ -facette f est donc égal au cardinal n_f de S_f . Dans l'opération de G_n^+ sur Ω^+ , l'élément ρ_{ij} ($\rho_{ij} = \alpha_i \alpha_j$) élevé à la puissance n_f est dans le sous-groupe stabilisateur de tout élément de S_f . Le stabilisateur d'un simplexe direct quelconque S de \mathbf{C} contient donc un conjugué de cette puissance de ρ_{ij} par un élément u de G_n^+ tel que $u.S$ soit un simplexe de S_f . Inversement, la présence dans un stabilisateur d'un conjugué d'une puissance $p^{\text{ème}}$ de ρ_{ij} signifie que le complexe \mathbf{C} contient une $(n-2)$ -facette autour de laquelle, l'indice de ramification est un diviseur de p .

1.3.3. *L'indice de ramification en un sommet est un sous-groupe d'un groupe libre de rang n .* On ne considère, ici aussi, que des complexes localement finis. Dans le revêtement ramifié $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ct}_n$ canoniquement associé au n -complexe galoisien \mathbf{C} , la ramification en un sommet de type A_i de \mathbf{C} est complètement décrite par la projection d'une n -pseudo-boule voisinage de ce sommet sur une n -boule voisinage de l'unique sommet du même type de \mathbf{Ct}_n . Cette n -pseudo-boule est un cône de sommet A_i sur un $(n-1)$ -complexe galoisien C' connexe fini recollement de $(n-1)$ -simplexes aux sommets étiquetés $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$, tandis que la n -boule est un cône de sommet A_i sur un $(n-1)$ -complexe galoisien C du même type que \mathbf{Ct}_{n-1} , si ce n'est que ses sommets sont étiquetés $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$ au lieu de A_0, A_1, \dots, A_{n-1} . La ramification est donc décrite par le complexe galoisien C' , ou encore, compte tenu de l'équivalence de catégories démontrée plus haut et de l'étiquetage des sommets de C' , par un G_{n-1}^{i+} -ensemble homogène représentant ce complexe à l'aide de l'opération d'un sous-groupe G_{n-1}^{i+} de G_n^+ obtenu en prenant les éléments pairs (i.e., produit d'un nombre pair de générateurs) du sous-groupe G_{n-1}^i de G_n engendré par les éléments $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ (G_{n-1}^i est isomorphe à G_{n-1} ; G_{n-1}^{i+} est isomorphe G_{n-1}^+ et c'est un groupe non abélien libre de rang $(n-1)$). Enfin, ce G_{n-1}^{i+} -ensemble homogène est lui-même décrit, à isomorphisme près, par un sous-groupe d'indice fini de G_{n-1}^i (stabilisateur). L'*indice de ramification* en le sommet considéré est ce sous-groupe d'indice fini, à conjugaison près. Par exemple, en dimension deux, l'indice est un sous-groupe d'indice fini de \mathbf{Z} , ce qui correspond à la donnée d'un entier naturel strictement positif.

1.4. La correspondance galoisienne.

1.4.1. *Sous-groupe associé, complexes réguliers.* Les propriétés de ce type de catégories sont bien connues (cf. [4]). On sait que la donnée d'un G_n^+ -ensemble homogène Ω^+ est, à isomorphisme près, équivalente à celle de la classe de conjugaison d'un sous-groupe H de G_n^+ (classe des stabilisateurs des différents éléments de Ω^+): Ω^+ est alors isomorphe au G_n^+ -ensemble homogène G_n^+ / H dont le groupe des automorphismes est isomorphe au quotient $N(H; G_n^+) / H$, où $N(H; G_n^+)$ désigne le normalisateur de H dans G_n^+ . Par équivalence de catégories, si \mathbf{C} est un complexe galoisien dont Ω^+ est l'ensemble des simplexes directs et si H est un sous-groupe associé comme ci-dessus au G_n^+ -ensemble homogène Ω^+ , le groupe $\text{Aut } \mathbf{C}$ des automorphismes du complexe vérifie: $\text{Aut } \mathbf{C} = N(H; G_n^+) / H$.

Le groupe $\text{Aut } \mathbf{C}$ des automorphismes de \mathbf{C} opère transitivement sur Ω^+ si et seulement si H est normal dans G_n^+ , on dira alors que \mathbf{C} est *régulier*.

1.4.2. *Objet initial, objet final.* Si on note \mathbf{C}_H le complexe galoisien associé à un sous-groupe H de G_n^+ (ce complexe n'est défini qu'à isomorphisme près, à moins

qu'on ait fait le choix d'un quasi-inverse privilégié de f_n), l'existence d'une inclusion entre des sous-groupes H et H' de G_n^+ implique l'existence d'un morphisme entre les complexes \mathbf{C}_H et $\mathbf{C}_{H'}: H \subset H' \Rightarrow \exists \theta: \mathbf{C}_H \rightarrow \mathbf{C}_{H'}$.

Cette propriété appliquée avec $H' = G_n^+$ montre que le complexe associé à G_n^+ est objet final dans \mathbf{CG}_n , il s'agit du complexe \mathbf{Ct}_n , *complexe trivial* ou encore *sphère canonique* déjà vu plus haut. La même propriété appliquée avec H égal au sous-groupe trivial mène à un complexe objet initial, dont l'ensemble des simplexes directs est en bijection avec G_n^+ . On verra plus loin ce complexe en dimension deux en termes de triangles du plan hyperbolique.

1.4.3. Quotient par sous-groupe d'automorphismes. Si H est un sous-groupe de G_n^+ contenant un sous-groupe normal N de G_n^+ , les inclusions $N \subset H \subset G_n^+$ correspondent à des morphismes $\mathbf{C}_N \rightarrow \mathbf{C}_H \rightarrow \mathbf{Ct}_n$ entre les complexes associés à ces sous-groupes. Comme N est normal, le groupe des G_n^+ -automorphismes de l'ensemble homogène G_n^+/N est isomorphe à G_n^+/N , il contient un sous-groupe A d'automorphismes isomorphe à H/N , et l'ensemble homogène G_n^+/H est le quotient de G_n^+/N par A . Par équivalence de catégories, il résulte que le complexe \mathbf{C}_H est quotient du complexe \mathbf{C}_N par un sous-groupe d'automorphismes de \mathbf{C}_N isomorphe à A . Tout complexe est donc quotient d'un complexe régulier par un sous-groupe d'automorphismes.

1.4.4. Complexes universels. On désigne par ρ_{ij} l'élément $\alpha_i \alpha_j$ de G_n^+ , pour tous i, j dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Soit $p = n(n+1)/2$. On note $(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ tout p -uple d'éléments de $\mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$, indexés par les couples (i, j) de $\{0, 1, \dots, n\}$ (avec $i < j$), écrits dans l'ordre lexicographique des indices. Soit $N(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ le sous-groupe normal de G_n^+ engendré par tous les $\rho_{ij}^{m_{ij}}$, avec la convention qu'un élément à la puissance ∞ est égal à 1. Il lui correspond un complexe $\mathbf{C}(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ régulier. D'après 1.3.2, pour le morphisme $\mathbf{C}(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn}) \rightarrow \mathbf{Ct}_n$, l'indice de ramification en toute $(n-2)$ -facette de type (i, j) de $\mathbf{C}(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ est égal à m_{ij} , ce qui signifie que $\mathbf{C}(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ possède exactement m_{ij} simplexes directs (et autant d'indirects) autour de chacune de ces facettes. On note $G_n^+(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ le quotient $G_n^+/N(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$. Les sous-groupes de $G_n^+(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ correspondent aux sous-groupes de G_n^+ qui contiennent $N(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ c'est à dire aux complexes dont $\mathbf{C}(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ est un revêtement ramifié. Ce sont les complexes dont le degré de ramification autour des $(n-2)$ -facettes de type (i, j) divisent m_{ij} . Ces complexes-là forment une catégorie équivalente à celle des $G_n^+(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ -ensembles homogènes: le sous-groupe trivial de $G_n^+(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ correspond au complexe $\mathbf{C}(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$, le sous-groupe maximum $G_n^+(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{nn})$ correspond au complexe trivial.

Tout n -complexe galoisien connexe dont les degrés de ramification sur le complexe trivial en ses $(n-2)$ -facettes sont majorés dans leur ensemble est élément de l'une de ces catégories: il suffit, pour tout couple (i, j) dans $\{0, 1, \dots, n\}$, de prendre pour m_{ij} le ppcm des degrés de ramifications en les $(n-2)$ -facettes de type (i, j) . Comme cela est possible pour les complexes finis, on obtient en particulier:

Théorème. *Tout n -complexe galoisien fini connexe est le quotient d'un n -complexe galoisien régulier par un sous-groupe du groupe des automorphismes de ce dernier.*

Mais c'est également vrai pour tout complexe localement fini connexe dont les degrés de ramification sont majorés.

Exemple. En dimension deux, les complexes $\mathbf{C}(m, n, p)$ peuvent être réalisés avec une métrique sphérique, euclidienne ou hyperbolique car $G_2^+(m, n, p)$ est le sous-groupe direct du groupe de triangle de signature (m, n, p) , c'est à dire du groupe engendré par les réflexions selon les cotés d'un triangle d'angles $(\pi/m, \pi/n, \pi/p)$, triangle sphérique, euclidien ou hyperbolique selon que la quantité $1/m + 1/n + 1/p$ est supérieure, égale ou inférieure à 1. Les complexes $\mathbf{C}(m, n, p)$ sont donc réalisables analytiquement dans la sphère de Riemann, le plan complexe ou le plan hyperbolique. Tout complexe fini est quotient de l'un d'eux par un groupe d'automorphismes (“uniformisation” en dimension deux).

1.5. Interprétation topologique des groupes G_n^+ et H . Il résulte des théories classiques sur les catégories galoisiennes de revêtements que la catégorie des n -complexes galoisiens est équivalente à celle des $\pi_1(S^n \setminus \tau)$ -ensembles, où $\pi_1(S^n \setminus \tau)$ est le groupe fondamental de $(S^n \setminus \tau)$ en un point quelconque. Par suite ce dernier est G_n^+ à isomorphisme près, ce qu'on pourrait vérifier directement facilement.

Lorsque \mathbf{C} est connexe, le sous-groupe H (stabilisateur) qui lui est associé (cf. 1.4.) est alors, de façon classique dans ce type de situation, à isomorphisme près, le groupe fondamental du complexe privé de son $(n-2)$ -squelette (image réciproque de l'ensemble de ramification) et le groupe fondamental du complexe \mathbf{C} en est alors lui-même un quotient: pour l'obtenir à partir de H il faut annuler dans ce dernier les éléments correspondant aux lacets “autour” des $(n-2)$ -facettes. Cela revient à faire le quotient de H par le sous-groupe normal engendré par les éléments qui sont des conjugués des puissances des ρ_{ij} ($\rho_{ij} = \alpha_i \alpha_j$) pour i et j dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

1.6. Equivalence de la catégorie des n -complexes avec une catégorie de complexes de dimension deux.

1.6.1. La catégorie \mathbf{CG}_n est équivalente à celle des G_n^+ -ensembles. Cette dernière est équivalente à la catégorie galoisienne des revêtements de tout espace E dont le groupe fondamental est isomorphe à G_n^+ , c'est à dire non abélien libre de rang n (E est supposé satisfaire aux hypothèses standard en la matière). Parmi les espaces E admissibles, on peut prendre une 2-sphère privée de $(n+1)$ points. Lorsqu'on marque ces points M_0, M_1, \dots, M_n sur un grand cercle de la sphère, celle-ci apparaît comme recollement de deux polygones à $(n+1)$ cotés et aux sommets étiquetés $((n+1)\text{-gones})$. Appelons *complexe galoisien de polygones à $(n+1)$ cotés* tout 2-complexe obtenu par recollement d'exemplaires directs et indirects d'un tel $(n+1)$ -gone affine aux sommets étiquetés, recollements respectant les étiquetages, compatibles avec l'orientation globale, de sorte que chaque arête appartienne à exactement deux polygones, un direct et un indirect (construction semblable à celle des 2-complexes galoisiens de simplexes). Prenons pour morphismes entre deux tels complexes (comme dans \mathbf{CG}_2) toute application continue du premier dans le second respectant la structure (décomposition en polygones direct et indirects, étiquetage des sommets, structures affines): ces morphismes sont des revêtements ramifiés en les sommets. La catégorie obtenue \mathbf{CGP}_{n+1} (complexes galoisiens de polygones à $(n+1)$ cotés), qui admet pour objet final le complexe trivial recollement de deux $(n+1)$ -gones est, à équivalence près, la catégorie galoisienne des revêtements de la sphère S^2 ramifiés au-dessus des $(n+1)$ points marqués. Elle est équivalente à la catégorie \mathbf{CG}_n car toutes les deux sont équivalentes à la catégorie galoisienne des ensembles homogènes sous un groupe non abélien libre de rang n .

Théorème. *La catégorie \mathbf{CG}_n des n -complexes galoisiens de simplexes est équivalente à la catégorie \mathbf{CGP}_{n+1} des 2-complexes galoisiens de polygones à $(n+1)$ cotés.*

1.6.2. Interprétation topologique pour n supérieur ou égal à trois.

On marque respectivement les points M_0, M_1, \dots, M_n aux centres des $(n-2)$ -facettes de type $(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 0)$ du simplexe S^+ , et on fait de même pour S^- (la $(n-2)$ -facette de type (i, j) est l'intersection des faces de type i et j). On effectue la même opération pour les exemplaires de S^+ et S^- d'un n -complexe galoisien \mathbf{C} . Dans chaque simplexe de \mathbf{C} , le segment $[M_i M_{i+1}]$ relie les centres des $(n-2)$ -facettes de type $(i, i+1)(i+1, i+2)$, il est entièrement contenu dans la face de type $(i+1)$. On obtient ainsi un polygone à n cotés, aux sommets étiquetés, plongé dans chaque simplexe de \mathbf{C} . Ces polygones sont recollés dans C de façon à former un complexe galoisien de polygones à $(n+1)$ cotés. Comme il y a bijection entre l'ensemble des faces des simplexes et l'ensemble des cotés de ces polygones, il est équivalent de se donner les recollements des simplexes ou de se donner les recollements des polygones. D'où l'équivalence entre les deux sortes d'objets.

Remarque. Cela ne fonctionne pas de la même façon pour n plus petit, car les segments ne sont pas contenus dans les faces. Par ailleurs, en dimension deux, le Théorème 1.6.1 perd tout son intérêt.

2. LA DIMENSION DEUX

2.1. En cette dimension deux, le complexe trivial \mathbf{Ct}_2 est une 2-sphère avec trois points marqués A_0, A_1, A_2 sur son équateur. Les 2-complexes galoisiens sont des revêtements de la 2-sphère ramifiés de façon quelconque au dessus de ces trois points. Le groupe non abélien libre de rang deux G_2^+ est le groupe fondamental de cette sphère privée de trois points. Par conséquent, bien que leur construction soit de nature différente, les 2-complexes galoisiens correspondent aux hypercartes. Le lien est facile à faire avec la construction utilisée par Corn et Singerman dans [3]: il suffit de considérer les points A_0, A_1, A_2 comme les centres respectifs des hyper-sommets, hyper-cotés et hyper-faces des hypercartes.

D'après 1.4.4, et avec les notations de ce paragraphe, la catégorie des $G_2^+(\infty, 2, \infty)$ -ensembles homogènes est équivalente à celle des revêtements de la 2-sphère au-dessus de trois points avec un indice de ramification majoré par 2 en l'un de ces points: c'est la théorie classique des cartes topologiques (cf. [6], [7], [11]). Les points A_0, A_1, A_2 correspondent respectivement aux sommets, milieu d'arêtes, centres des faces des cartes.

On a aussi:

Théorème. *La sous-catégorie pleine des 2-complexes galoisiens dont les indices de ramification en les sommets de type A_1, A_2 sont majorés respectivement par 2 et 3 (“triangulations” des surfaces orientables) est équivalente à la catégorie des $G_2^+(3, 2, \infty)$ -ensembles. Le groupe $G_2^+(3, 2, \infty)$ en question est, à isomorphisme près, le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$.*

En effet, compte tenu de ce qui précède, les $G_2^+(3, 2, \infty)$ -ensembles classifient les cartes dont les faces ont un ou trois cotés. De plus, le groupe $G_2^+(3, 2, \infty)$ est engendré par deux éléments $\bar{\rho}_{01}$ et $\bar{\rho}_{02}$ soumis aux relations $\bar{\rho}_{01}^3 = \bar{\rho}_{02}^2 = 1$, ce qui

est une présentation du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})/\{\pm 1\}$ ou encore $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$. Ce dernier groupe est donc le classifiant des “triangulations”, en un sens généralisé.

Exemple. Modulo isomorphisme entre $G_2^+(3, 2, \infty)$ et $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$, les noyaux des morphismes naturels: $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ pour $p = 3$ et $p = 5$ sont deux sous groupes normaux de $G_2^+(3, 2, \infty)$ qui correspondent respectivement au tétraèdre et à l'icosaèdre (cf. [11]).

2.2. Objet initial de \mathbf{CG}_2 . Il correspond au sous groupe trivial de G_2^+ . Une représentation analogue à celle des cartes universelles de Farey et Singerman (cf. Singerman [14]) à l'aide de domaines fondamentaux de groupes Fuchsiens peut en être donnée: le groupe G_2^+ peut être considéré comme un groupe Fuchsien opérant sur le demi plan de Poincaré, sous-groupe direct du groupe engendré par les réflexions selon un demi-cercle géodésique d'extrémités A_1 et A_2 sur \mathbf{R} , et selon les demi-droites tangentes en A_1 et A_2 passant par le point à l'infini A_0 . Le support du complexe est alors formé du demi-plan de Poincaré (ouvert) auquel il faut ajouter les sommets de type A_0, A_1, A_2 qui sont des points limites sur l'axe réel.

2.3. Structures sur les 2-complexes galoisiens. On peut, par relèvement de structure sur la sphère privée de trois points mettre plusieurs types de structures sur un 2-complexe galoisien localement fini:

- Structure plate à singularités en les points de ramifications.
- Structure Riemannienne à courbure constante avec singularités en ces mêmes points, puisque la sphère trouée en trois points peut être munie aussi bien d'une métrique de courbure nulle (induite par une métrique euclidienne de S^+), que d'une métrique de courbure +1 (métrique usuelle de S^2), ainsi que d'une métrique de courbure -1 (en prenant des triangles hyperboliques pour simplexes).
- Structure analytique canonique induite par relèvement de celle de la sphère S^2 , y compris en les points de ramification, car il y a prolongement en ces points puisque le modèle local est une fonction puissance ou exponentielle complexe.
- Structure algébrique canonique de courbe sur un corps de nombres en interprétant le complexe trivial comme $P_1(\mathbf{C})$ muni du triple $(0, 1, \infty)$, ces courbes là étant justement les revêtements ramifiés de la sphère en trois points (cf. Belyi [2]).

2.4. Groupe fondamental d'un 2-complexe. Lorsque le 2-complexe localement fini \mathbf{C} a les degrés de ses sommets majorés, il est le quotient d'un complexe universel régulier $\mathbf{C}(m, n, p)$ par un sous groupe \mathbf{A} du groupe des automorphismes de ce dernier (cf. 1.4.4). On a alors:

Théorème. *Le groupe fondamental de \mathbf{C} est le quotient de \mathbf{A} par son sous-groupe normal engendré par ses éléments d'ordre fini (ce sont les éléments à points fixes).*

Ce théorème est l'analogue, dans le cadre des complexes galoisiens, d'un théorème bien connu sur les groupes fuchsiens, et d'un théorème de Jones et Singerman dans le cadre des cartes (cf. [7]). Pour établir ce résultat, on peut utiliser le théorème de M. A. Armstrong (cf. [1]), ou bien simplement utiliser le fait que \mathbf{C} est le quotient d'un $\mathbf{C}(m, n, p)$ par un sous-groupe d'automorphismes \mathbf{A} isomorphe à $H/N(m, n, p)$, où H est le sous-groupe de G_2^+ associé à \mathbf{C} (cf. 1.4): le groupe fondamental est le quotient de H par son sous-groupe normal engendré par ceux de ses éléments qui sont des conjugués de puissances des ρ_{ij} pour i, j dans $\{0, 1, 2\}$ (cf. 1.5) et, par suite, il est aussi le quotient de \mathbf{A} par son sous-groupe normal engendré par ceux des ses éléments qui sont des conjugués des puissances des $\bar{\rho}_{ij}$ (classes dans \mathbf{A}) pour i, j

dans $\{0, 1, 2\}$. Or le groupe $G_2^+(m, n, p)$ de tous les automorphismes de $\mathbf{C}(m, n, p)$ (isomorphe à $G_2^+/N(m, n, p)$) est engendré par les $\bar{\rho}_{ij}((i, j) = (0, 1), (0, 2), (1, 2))$ soumis aux relations: $\bar{\rho}_{01}^m = \bar{\rho}_{02}^n = \bar{\rho}_{12}^p = 1$ et $\bar{\rho}_{01}\bar{\rho}_{12}\bar{\rho}_{02}^{-1} = 1$.

Il est connu que les éléments d'ordre fini d'un groupe de ce type sont les classe de conjugaisons des puissances des $\bar{\rho}_{ij}$. Par ailleurs, les automorphismes à point fixe de $\mathbf{C}(m, n, p)$ sont (modulo l'isomorphisme de leur groupe avec $G_2^+/N(m, n, p)$) les classes de conjugaisons des mêmes $\bar{\rho}_{ij}$: cela résulte du fait qu'un point fixe ne peut être qu'un sommet de type A_0 , A_1 , ou A_2 .

2.5. La réduction des 2-complexes.

2.5.1. Etant donné un 2-complexe galoisien \mathbf{C} contenant deux simplexes de sens opposés S et S' ayant une arête commune, par exemple $[A_1A_2]$, et l'autre sommet en commun, on définit un nouveau complexe \mathbf{C}' par suppression dans \mathbf{C} de ces deux simplexes et recollement des quatre arêtes ainsi libérées de la seul façon compatible avec les étiquetages des sommets. On désigne cette opération par le nom de Réduction de type R1.0

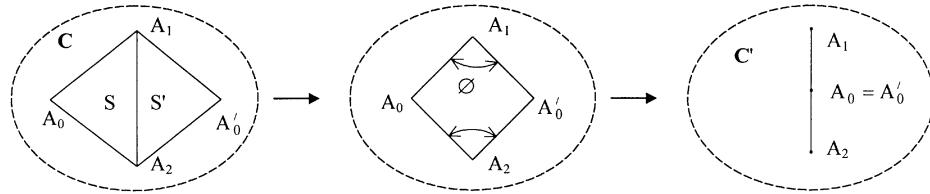


FIGURE R1.0.

Elle conduit à un complexe \mathbf{C}' qui est topologiquement équivalent à \mathbf{C} et qui comporte un sommet de type A_0 (dans l'exemple pris) de moins que \mathbf{C} . On a donc facilement:

Théorème. *Par des opérations de réduction de type R1.0, on peut transformer tout 2-complexe galoisien fini connexe \mathbf{C} en un 2-complexe galoisien ne possédant qu'un seul sommet de chacun des types A_0, A_1, A_2 , et topologiquement équivalent à \mathbf{C} .*

Un tel complexe sera appelé *complexe normal*.

2.5.2. Le second type d'opération de réduction, appelé réduction R1.1, concerne un 2-complexe galoisien \mathbf{C} contenant deux simplexes de sens opposés S et S' ayant une arête commune, par exemple $[A_1A_2]$, et le troisième sommet en commun. On définit un nouveau complexe \mathbf{C}' par suppression dans \mathbf{C} de ces deux simplexes et recollement des quatre arêtes ainsi libérées de la seul façon compatible avec les étiquetages des sommets.

Le complexe \mathbf{C}' obtenu n'est pas topologiquement équivalent à \mathbf{C} . Il y a deux cas à étudier selon que cette opération disconnecte ou non le complexe. Dans le premier cas (disconnexion) l'opération est topologiquement l'inverse d'une somme connexe de surfaces orientées. Dans le second cas (sans disconnection), il y a eu ablation d'une anse ($S^1 \times I$) et bouchage des trous; il faut noter aussi que cela fait apparaître un nouveau sommet par dédoublement du sommet commun aux deux simplexes.

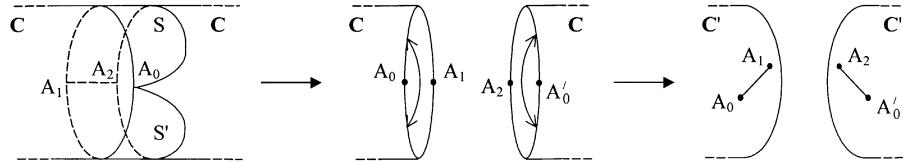


FIGURE R1.1.

2.5.3. A partir d'un 2-complexe \mathbf{C} connexe fini, on peut obtenir par des réductions R1.0 un complexe normal, à trois sommets. Si \mathbf{C} possède un couple de simplexes ayant en commun exactement deux arêtes, ils forment un disque topologique dont l'intérieur contient le sommet commun à ces deux arêtes. Ce sommet n'est donc pas seul de son type et cela contredit la normalité. Si \mathbf{C} possède deux simplexes qui ont en commun une arête et le troisième sommet, on effectue une réduction R1.1 suivie d'une réduction R1.0 pour retrouver un complexe normal à trois sommets. En itérant cette démarche, on finit par obtenir le complexe trivial composé de deux simplexes. Compte tenu du fait que toute surface compacte connexe orientable peut, via une triangulation, être munie d'une structure de 2-complexe galoisien fini, on retrouve ainsi le fait bien connu qu'elle est obtenue par adjonction d'anses à la sphère. Par ailleurs, une telle surface possède une décomposition minimale en complexe galoisien normal: le nombre minimal k de simplexes directs nécessaires est manifestement un invariant topologique, qu'on relie facilement au nombre g de réductions R1.1 nécessaire pour réduire le complexe au complexe trivial ($k = 1 + 2g$). Notons que cela fournit un démonstration très rapide de la classification de ces surfaces.

Exemple. La décomposition canonique du tore en complexe galoisien normal est composée de trois simplexes directs et de trois indirects. Le groupe d'automorphismes conservant l'orientation est $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ tandis que le groupe total (automorphismes directs et indirects) est $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$. En genre g , on a l'analogie avec $2(2g + 1)$ simplexes, (assemblés autour du sommet A_0 avec recollement de chaque couple d'arêtes symétriques par rapport à ce point) et un groupe complet d'automorphismes d'ordre $2(2g + 1)$, nombre dont il est bien connu, par ailleurs, que c'est l'ordre maximal d'un groupe cyclique d'homéomorphismes d'une surface de genre g .

Comme les complexes minimaux obtenus ci-dessus sont réguliers, cela montre qu'on peut munir toute surface compacte orientable connexe d'une structure de 2-complexe galoisien régulier.

3. LA DIMENSION TROIS

3.1. Topologiquement, les 3-complexes galoisiens sont des revêtements de la sphère S^3 ramifiés au dessus du 1-squelette d'un 3-simplexe. C'est une propriété bien connue dans le cadre des 3-variétés orientables (cf. [13]), et qu'on retrouve ici puisqu'une telle 3-variété, étant triangulable, peut être munie d'une structure de 3-complexe galoisien.

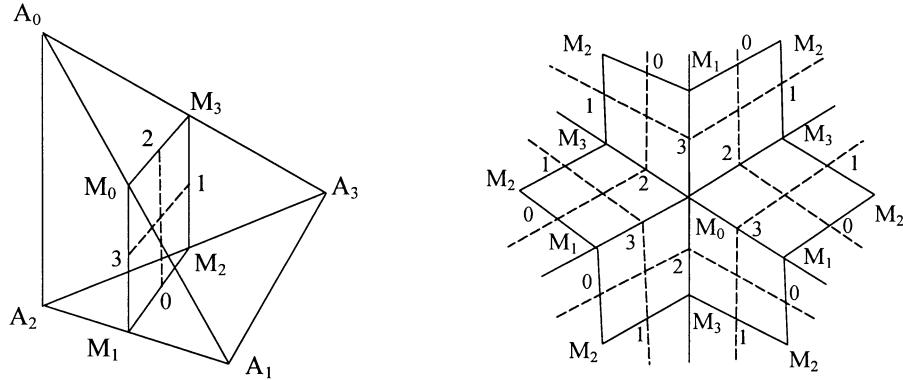
Définition. Une pseudo-variété est appelée *régulière* si elle peut être munie d'une structure de complexe galoisien régulier.

On ne sait pas s'il est possible de munir toute 3-variété orientable d'une structure de complexe régulier; contrairement à ce qui se passe en dimension deux, il est très douteux que ce soit possible. Par contre, on a, comme conséquence de 1.4:

Théorème. *Toute 3-variété compacte orientable connexe est quotient d'une 3-pseudo-variété régulière par un sous-groupe d'automorphismes de celle-ci.*

On peut choisir cette pseudo-variété régulière égale à l'un des complexes $C(m_{00}, m_{01}, m_{02}, m_{12}, m_{13}, m_{23})$. En théorie, la connaissance de ces complexes et de leurs automorphismes conduit à la connaissance des 3-variétés.

3.2. Equivalence entre 3-complexes simpliciaux galoisiens et complexes galoisiens de carrés. D'après 1.6, la catégorie \mathbf{CG}_3 des 3-complexes galoisiens est équivalente à la catégorie \mathbf{CGP}_4 des 2-complexes galoisiens de polygones à 4 cotés, qu'on appellera plus simplement *Complexes de Carrés*. Ces derniers sont les complexes obtenus par recollement de carrés aux sommets étiquetés M_0, M_1, M_2, M_3 . Ce sont aussi les revêtements de la sphère S^2 , obtenue par recollement de deux tels carrés, ramifiés au-dessus de quatre points. Topologiquement, les points M_0, M_1, M_2, M_3 sont respectivement les milieux des arêtes $[A_0A_1], [A_1A_2], [A_2A_3], [A_3A_0]$. Un carré $[M_0M_1M_2M_3]$ partage chaque 3-simplexe en deux polyèdres: les deux *combles* $[A_0A_2M_0M_1M_2M_3]$ et $[A_1A_3M_0M_1M_2M_3]$.



Le choix qu'on a fait pour marquer les quatre milieux d'arêtes est conforme à ce qui a été fait en 1.6. Ce n'est pas la seule possibilité. Il y a trois façons d'associer un tel complexe de carrés à un 3-complexe. Elles correspondent aux différentes façons de décomposer le simplexe standard en deux combles, mais aussi à différentes façons d'identifier les trois générateurs de G^+ à trois générateurs du groupe fondamental de S^2 privée de quatre points pour réaliser l'équivalence de catégories.

Comme cela a été dit en 1.6, la donnée des recollements entre simplexes équivaut à la donnée des recollements entre carrés. Cette correspondance fonctionne fonctoriellement. Une méthode de ce type pour décrire un 3-complexe à partir de carrés est utilisée par J. M. Montesinos pour construire des exemples de 3-variétés (cf. [13]); elle est retrouvée ici dans le cadre de l'équivalence des catégories galoisiennes.

Le connaissance du complexe de carrés associé à un 3-complexe galoisien \mathbf{C} détermine parfaitement tous les éléments de la structure de \mathbf{C} : on a vu que les faces du 3-complexe correspondent aux arêtes du 2-complexe de carrés; les arêtes du 3-complexe contenant les points M_0, M_1, M_2 , ou M_3 correspondent aux sommets

du 2-complexe. On peut vérifier que les autres arêtes correspondent bijectivement aux composantes des deux 1-complexes formés par la réunion des médianes d'un même type des carrés. Quant aux sommets d'un type donné du 3-complexe, ils correspondent bijectivement aux composantes du 1-complexe formé par les cotés d'un type donné des carrés.

Toute question sur les 3-complexes galoisiens a, théoriquement, sa traduction en termes de complexes de carrés.

3.3. Réduction des 3-complexes galoisiens. Dans toute la suite, on ne considère que des complexes connexes finis (donc compacts) qui sont des 3-variétés: cela équivaut à la nullité de leur caractéristique d'Euler-Poincaré, propriété bien connue pour les 3-pseudo-variétés. J'introduis des opérations de réductions sur un complexe \mathbf{C} , qui portent toujours sur un couple de simplexes (direct, indirect) recollés dans \mathbf{C} . La réduction consiste toujours en la suppression de ces deux simplexes. Je distingue plusieurs types d'opérations selon l'intersection des deux simplexes dans \mathbf{C} .

3.3.1. Opération R1.0. Suppression de deux simplexes S et S' dont l'intersection dans \mathbf{C} est exactement une face: cela libère six faces qu'on recolle en respectant les étiquetages: il n'y a qu'une possibilité.

Comme toute l'opération se déroule à l'intérieur d'une boule ouverte voisinage de $S \cup S'$, le nouveau complexe est topologiquement équivalent à \mathbf{C} . Cette opération diminue le nombre total de sommets de une unité. On peut itérer l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que quatre sommets, car si le complexe contient plusieurs sommets de même type, par exemple de type A_0 , il contient alors deux simplexes qui ont en commun leur face $[A_1 A_2 A_3]$, et deux sommets A_0 distincts (dans le cas contraire, l'hypothèse de connexité, jointe au fait que tout couple de simplexes recollés par une face quelconque a le même sommet de type A_0 entraînerait l'unicité de ce sommet de type A_0) et on peut réduire. On a donc le théorème:

Théorème. *Par des opérations de réduction de type R1.0, on peut transformer tout 3-complexe galoisien fini en un 3-complexe galoisien topologiquement équivalent ne possédant que quatre sommets: un de chacun des types A_0, A_1, A_2, A_3 .*

Terminologie. Un 3-complexe galoisien qui n'a que quatre sommets et qui est une variété sera dit *normal*. L'exemple le plus simple est celui du complexe trivial (sphère canonique), réduit à deux simplexes.

3.3.2. Opération R2.0. Suppression de deux simplexes S et S' dont l'intersection dans \mathbf{C} est constituée de deux faces: cela libère quatre faces qu'on recolle en respectant les étiquetages: il n'y a qu'une possibilité. Comme toute l'opération se déroule, ici aussi, à l'intérieur d'une boule ouverte voisinage de $S \cup S'$, le nouveau complexe est encore topologiquement équivalent à \mathbf{C} .

Si le complexe initial était normal, il en est de même pour le nouveau complexe, car il n'y a pas apparition de nouveau sommet. On peut donc, par des opérations R1.0 et R2.0 transformer tout complexe en un complexe normal dans lequel l'intersection de deux simplexes n'est jamais égale à la réunion de deux faces.

3.3.3. Remarque. On pourrait introduire aussi une opération R3 consistant en la suppression de deux simplexes S et S' dont l'intersection dans \mathbf{C} est constituée de trois faces, libérant deux faces qu'on recolle (l'opération se déroulant l'intérieur d'une boule ouverte voisinage de $S \cup S'$, le nouveau complexe est topologiquement

équivalent à \mathbf{C}). Mais cette opération n'est pas indispensable, car l'existence de deux tels simplexes dans \mathbf{C} implique qu'il contient plus de quatre sommets et qu'il est aussi réductible par R1.0.

3.3.4. *Opération R1.1.* Suppression de deux simplexes S et S' dont l'intersection dans \mathbf{C} est constituée d'une face et d'une arête n'appartenant pas à cette face: cela libère six faces qu'on recolle en respectant les étiquetages: il n'y a qu'une possibilité.

Comme toute l'opération se déroule, ici aussi, à l'intérieur d'une boule ouverte voisine de $S \cup S'$, le nouveau complexe est topologiquement équivalent à \mathbf{C} . Mais le sommet commun à la face et à l'arête communes à S et S' est dédoublé par l'opération. Si le complexe initial est normal, ce n'est donc plus le cas du complexe obtenu. Il y a lieu de faire suivre cette opération d'une opération R1.0 pour revenir à la normalité.

3.3.5. *Opération R2.1.* Suppression de deux simplexes S et S' dont l'intersection dans \mathbf{C} est constituée de deux faces et de l'arête intersection des deux autres faces: cela libère quatre faces qu'on recolle de la seule façon qui respecte les étiquetages.

Cela conduit à un nouveau complexe qui n'est pas topologiquement équivalent au premier, comme on va le voir. On suppose que le simplexe S est direct, que S' est indirect, que S et S' ont en commun dans \mathbf{C} leurs faces de type $[A_0, A_2, A_3]$ et $[A_1, A_2, A_3]$ ainsi que l'arête de type $[A_0, A_1]$, ce qui fait que dans \mathbf{C} ils ont les mêmes sommets. On a représenté la situation sur la figure ci-dessous (à gauche, ne figure que la seule identification des faces, celle des arêtes étant indiquée par des flèches):

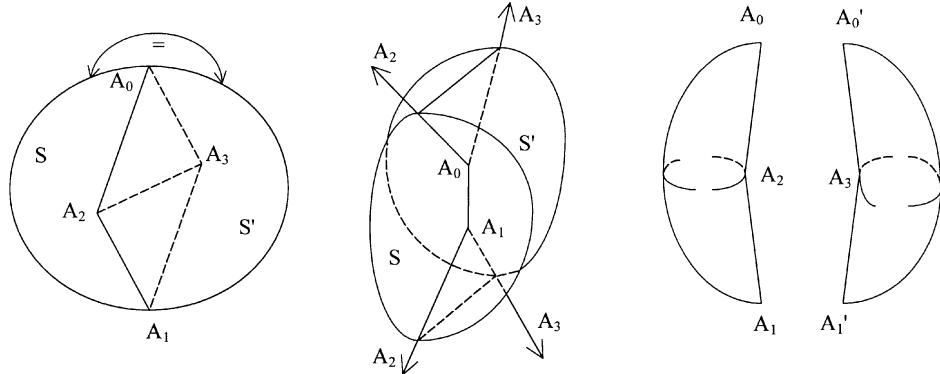


FIGURE R2.1.

Après suppression de S et S' , le sommet A_0 , qui était commun aux deux simplexes, se trouve dédoublé en deux sommets A_0 et A'_0 ; le sommet A_1 est dédoublé en A_1 et A'_1 , l'arête $[A_0A_1]$ est dédoublée en deux arêtes $[A_0A_1]$ et $[A'_0A'_1]$: cela se vérifie en examinant la situation aux voisinages de ces trois éléments (figure centrale): les simplexes assemblés dans \mathbf{C} autour de $[A_0A_1]$ sont séparés par $S \cup S'$ et se retrouvent divisés en deux blocs, de même que les simplexes assemblés autour de A_0 et ceux assemblés autour de A_1 . Le complexe privé de S et S' est topologiquement une 3-variété à bord dont le bord est constitué de deux 2-sphères, réunions respectives de deux faces de type $[A_0, A_1, A_2]$ et de deux faces de type $[A'_0, A'_1, A_3]$.

(figure de droite). On referme chacune de ces sphères, en effectuant les seules identifications possibles, compte tenu des étiquetages. La partie extraite du complexe (constituée de S et S' recollés par deux faces et l'arête restante) est une 3-boule fermée privée d'une 3-boule ouverte. Deux cas sont possibles: ou bien l'on vient de disconnecter \mathbf{C} en deux complexes \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 (ce qui est manifestement impossible si \mathbf{C} est normal, car il n'y a eu adjonction que de deux sommets) et l'opération est alors l'inverse d'une somme connexe, ou bien l'on n'a pas disconnecté \mathbf{C} , et ce qu'on vient de faire est l'ablation d'une anse de type $S^2 \times I$ suivie de fermeture. Si le complexe initial est normal, ce n'est plus le cas du nouveau complexe: il y a lieu de procéder à deux réductions R1.0 pour retrouver la normalité.

3.3.6. *Opérations R1.2 et R1.3.* Suppression de deux simplexes S et S' dont l'intersection dans \mathbf{C} est constituée d'une face et de deux (pour R1.2) ou trois (pour R1.3) arêtes n'appartenant pas à cette face: cela libère six faces qu'on recolle en respectant les étiquetages, de la seule façon possible.

Le nouveau complexe n'est plus topologiquement équivalent à \mathbf{C} . Dans le cas de R1.2, cela dédouble deux sommets. L'ablation de S et S' revient à ôter de \mathbf{C} une 3-boule fermée privée d'une boule ouverte et à refermer chacune sur elle-même les deux 2-sphères ainsi formés dans \mathbf{C} . Si l'opération disconnecte le complexe (ce qui est clairement impossible s'il est initialement normal), c'est l'inverse d'une somme connexe. Si elle ne le disconnecte pas, l'opération est une ablation d'anse. Dans le cas de R1.3, trois sommets sont éclatés chacun en trois. L'ablation de S et S' revient à ôter de une boule fermée privée de deux boules ouvertes et à refermer les trois 2-sphères ainsi formées, chacune sur elle-même. Selon le type de disconnection que cela induit sur le complexe, cela correspond à l'inverse d'une double somme connexe, à une somme connexe et ablation d'une anse, ou bien à l'ablation de deux anses, ce dernier cas ayant lieu en cas de conservation de la connexité, ce qui a toujours lieu lorsque le complexe initial est normal.

3.3.7. *Effet sur les complexes de carrés.* Chacune de ces réductions peut être suivie sur un complexe de carrés Σ associé au 3-complexe \mathbf{C} . Cela consiste toujours en la suppression de deux carrés recollés par un ou plusieurs cotés et fermeture par recollement de la seule façon qui respecte les étiquetages. Selon les cas, cela diminue ou non le genre de la surface support. Dans la pratique, c'est sur le complexe de carrés qu'on effectue la réduction.

3.3.8. *Réduction des 3-complexes variétés.* Un 3-complexe galoisien (fini, connexe, variété, comme toujours dans cette partie) sera appelé *irréductible* si on ne peut lui appliquer aucune des opérations de réduction définies plus haut. C'est donc, soit le complexe trivial (sphère canonique) recollement de deux simplexes, soit un complexe normal dont les simplexes n'ont jamais, deux à deux, deux faces communes, et tel que tout couple de simplexes qui a une face commune n'a pas d'autre arête en commun.

Théorème. *Après ablation d'un nombre fini d'anses $S^1 \times I$, et fermeture, toute 3-variété compacte orientable connexe peut être munie d'une structure de 3-complexe galoisien irréductible.*

Il est bien clair qu'on peut faire des opérations de réduction jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, et qu'alors on est en situation d'irréductibilité. Mais, pour démontrer l'énoncé, il s'agit de vérifier qu'on peut faire cela sans disconnecter, et

il faut donc regarder les choses plus en détail. A partir d'une triangulation, on construit par subdivision barycentrique une structure de complexe galoisien, qu'on réduit à la normalité par des opérations R1.0. Le complexe, étant normal, ne peut alors contenir de couple de simplexes ayant trois faces communes. On peut par des opérations R2.0 ou R2.1 supprimer les couples de simplexes ayant deux faces communes. Après chaque réduction de type R2.1, qui supprime une anse (car, par normalité, il ne peut y avoir disconnection) on perd la normalité et il y a lieu de la retrouver immédiatement par une opération R1.0. Quand cela est terminé, il ne reste plus qu'à supprimer les couples de simplexes ayant une face commune et une, deux, trois arêtes supplémentaires en commun, ce qu'on peut faire par des opérations R1.1, R1.2, R1.3 sans oublier, après chacune d'elles, de supprimer les nouveaux sommets par des opérations R1.0: de cette manière, on revient à chaque fois à la normalité et aucune opération ne disconnecte. Comme le complexe est fini, le processus s'arrête sur un complexe irréductible.

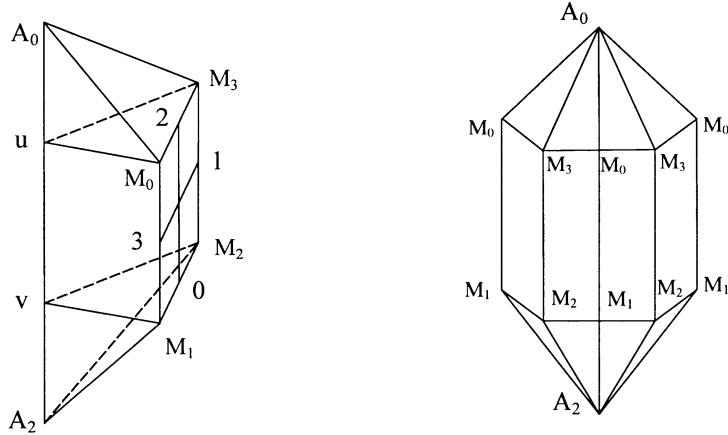
3.4. Décompositions de Heegard. Génération des 3-variétés par colonnes.

3.4.1. Dans le cas où \mathbf{C} est fini, il en est de même du complexe de carrés correspondant, dont le support est alors une surface orientée compacte. Cette surface est le bord d'une 3-pseudo-variété à bord \mathbf{H}_{02} constituée par la réunion des combles de type $[A_0 A_2 M_0 M_1 M_2 M_3]$. C'est aussi le bord d'une seconde 3-pseudo-variété à bord \mathbf{H}_{13} constituée par la réunion des combles de type $[A_1 A_3 M_0 M_1 M_2 M_3]$. Ce sont des variétés si \mathbf{C} en est une, et on reconnaît alors une décomposition de Heegard de la 3-variété \mathbf{C} : \mathbf{H}_{02} (respectivement \mathbf{H}_{13}) est un voisinage tubulaire du 1-complexe \mathbf{C}_{02} (respectivement \mathbf{C}_{13}) réunion des arêtes de type $[A_0 A_2]$ (respectivement $[A_1 A_3]$) de \mathbf{C} . On parlera aussi, dans le cas général, de *décomposition de Heegard du complexe*. Celle qu'on vient de voir est associée à la partition $\{\{A_0, A_2\}, \{A_1, A_3\}\}$ des quatre types de sommets. Il y en a deux autres associées respectivement aux deux autres partitions en deux ensembles de deux éléments.

3.4.2. *Les colonnes et leur recollement.* Dans cette partie on ne considère que des complexes finis connexes qui sont des variétés. Les notations sont celles de 3.4.1.

Soit \mathbf{C} un complexe normal (à quatre sommets), le 1-complexe \mathbf{C}_{02} (réunion des arêtes de type $[A_0 A_2]$) possède n segments joignant l'unique sommet A_0 à l'unique sommet A_2 , le voisinage tubulaire \mathbf{H}_{02} réunion des combles du type $[A_0 A_2 M_0 M_1 M_2 M_3]$ est une 3-variété à bord de genre $(n - 1)$: c'est l'un des deux "handlebodies" de la décomposition de Heegard dont le second handlebody est la réunion des combles du type $[A_1 A_3 M_0 M_1 M_2 M_3]$ autour du 1-complexe \mathbf{C}_{13} (réunion des arêtes de type $[A_1 A_3]$). L'entier $(n - 1)$ est le genre de la surface orientable connexe et compacte que est bord commun de ces deux variétés. Le nombre d'arêtes de type $[A_1 A_3]$ est donc également n . On dira que \mathbf{C} est de genre $(n - 1)$: il y a ainsi trois genres associés à \mathbf{C} , via ses trois décompositions de Heegard canoniques, correspondant aux trois couples d'arêtes opposées du simplexe standard étiqueté S .

Autour de chacune des n arêtes $[A_0 A_2]$, la réunion des combles de type $[A_0 A_2 M_0 M_1 M_2 M_3]$ constitue un *colonne* de type $(0, 2)$. Ces n colonnes sont assemblées par leurs extrémités pour former \mathbf{H}_{02} . Plus précisément, on divise chacun des combles comme sur la figure ci-dessous, en deux "petits simplexes" $[A_0, u, M_0, M_3]$, $[A_2, v, M_1, M_2]$ et un prisme $[u, v, M_0, M_1, M_2, M_3]$. Les n extrémités contenant A_0 des colonnes sont recollées autour de A_0 : les petits simplexes



contenant A_0 forment ainsi une 3-boule \mathbf{B}_0 voisinage de A_0 . De même, les n petits simplexes, extrémités de colonnes contenant A_2 forment une boule \mathbf{B}_2 voisinage de A_2 . Les prismes sont recollés entre eux pour former n cylindres (trons de colonnes homéomorphes à $B^2 \times I$); enfin chacun d'eux est recollé par ses extrémités à \mathbf{B}_0 et \mathbf{B}_2 .

Le résultat est le handlebody \mathbf{H}_{02} , dont la surface supporte le complexe Σ des carrés $[u, M_0, M_1, M_2, M_3]$. Cette surface, munie du complexe \mathbf{m}_{02} des médianes de type $[0, 2]$ (cf. figure ci-dessus) de ces carrés détermine un diagramme de Heegard, associé à la variété support de \mathbf{C} : en effet ces médianes forment n composantes car, de même que le complexe des médianes \mathbf{m}_{13} de type $[1, 3]$ comprend autant de composantes qu'il y a de colonnes de type $(0, 2)$, puisque chaque composante entoure une colonne, le complexe \mathbf{m}_{02} comporte n composantes entourant chacune une colonne de type $(1, 3)$. En fait, on ne gardera que $(n - 1)$ courbes pour le diagramme de Heegard, cela suffit pour découper la surface en une sphère trouée.

Ceci fournit donc une façon simple de générer les variétés compactes orientables et leurs diagrammes de Heegard: la structure de complexe de carrés sur Σ est complètement déterminée par la structure des boules \mathbf{B}_0 et \mathbf{B}_2 (c'est à dire la façon dont les 2-sphères les bordant sont divisées en n disques par le complexe réunion des arêtes $[M_0, M_3]$ pour la première et par le complexe réunion des arêtes $[M_1, M_2]$ pour la seconde) et par la façon dont ces disques sont reliés par les n cylindres troncs de colonnes, avec les torsions relatives que cela représente.

4. DEUX REMARQUES

4.1. Les décompositions galoisiennes normales non triviales de la 3-sphère. Il est très simple de construire des décompositions simpliciales galoisiennes non triviales de la sphère S^3 qui n'ont que quatre sommets: l'exemple le plus simple est constitué à partir de quatre simplexes: S_1^+, S_1^- directs, S_2^+, S_2^- indirects. On forme une première 3-boule en recollant les deux premiers par leurs faces $[A_0, A_1, A_2]$ et $[A_0, A_1, A_3]$, on forme une seconde boule semblable avec les deux derniers, on recolle ensuite les quatre faces de la première sur les quatre faces de la seconde de la seule façon possible, compte tenu du respect des étiquetages de sommets. Il y a évidemment des exemples bien plus complexes. Tous ces exemples de décomposition galoisienne ne sont pas irréductibles puisqu'ils contiennent des couples de simplexes

ayant deux faces communes. Le problème se pose donc de savoir s'il existe un complexe sphérique irréductible autre que le complexe trivial. Aucun exemple ne semble être actuellement connu, mais une démonstration annoncée de sa non existence (cf. [8]) s'est avérée incomplète. La problème semble donc ouvert. Une réponse négative établirait l'existence d'un algorithme de reconnaissance de la sphère S^3 plus simple que ceux qui sont actuellement connus (cf. [12], [15]).

4.2. Les 2-complexes galoisiens singuliers. L'étude des 3-complexes galoisiens mène naturellement à celle d'autres objets liés à la question et dont les propriétés méritent d'être sérieusement examinées: ce sont les 2-complexes galoisiens singuliers, dans lesquels une arête peut appartenir à plus de deux 2-simplexes. En particulier, on peut remarquer que la donnée d'un tel 2-complexe singulier fini et d'un ordre circulaire sur chaque ensemble de 2-simplexes recollés sur un même arête détermine un 3-complexe galoisien fini et réciproquement. C'est, en ces dimensions 2-3, une propriété analogue à celle utilisée en dimensions 1-2 pour classifier les voisinages tubulaires des 1-complexes lors de l'étude des classes d'isotopie de plongements de ces derniers dans les surfaces (cf. [9]).

5. CONCLUSION

L'utilisation de complexes galoisiens dans les problèmes concernant les 3-variétés permet de répondre à plusieurs impératifs: représentation simple des catégories galoisiennes de revêtements ramifiés, équivalence de ces catégories, représentation des 3-complexes par complexes de carrés et dictionnaire liant les deux structures (traduction d'un problème de la dimension trois en un problème de la dimension deux, manipulation pratique d'exemples et recherche de propriétés sur ces exemples), bonnes propriétés topologiques par le fait que ces complexes supportent, de par leur structure, des opérations spécifiques, dont les opérations de réduction introduites ici. Le problème majeur est évidemment celui de l'existence d'un 3-complexe galoisien irréductible non trivial simplement connexe.

REFERENCES

- [1] M. A. Armstrong, *On the fundamental group of an orbit space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **61** (1965), 639–646. MR **32**:4697
- [2] G. V. Belyi, *Gallis extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izv. **14** (1979), 247–256. MR **80f**:12008
- [3] D. Corn and D. Singerman, *Regular hypermaps*, Europ. J. Comb. **9** (1988), 337–351. MR **89e**:05075
- [4] R. Douady and A. Douady, *Théories galoisiennes*, Cedic-Fernand Nathan, Paris, 1979. MR **82b**:12024b
- [5] M. Ferri, *Crystallisations of 2-fold branched coverings of S^3* , Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979), 271–276. MR **80k**:57037
- [6] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme* (1984), in *Géometric Galois Actions. 1*. London Math. Soc. Lecture Note Series 242, ed. by L. Schneps and P. Lochak, Cambridge, 1997, pp. 5–48. MR **98e**:14003
- [7] G. A. Jones and D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces*, Proc. London Math. Soc. **37** (1978), 273–307. MR **58**:21744
- [8] Y. Ladegaillerie, *Réduction de 3-complexes galoisiens. Complexes sphériques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **324** (1997), 651–654. MR **98b**:57023
- [9] Y. Ladegaillerie, *Classes d'isotopies de plongements de 1-complexes dans les surfaces*, Topology **23** (1984), 361–372. MR **86e**:57020
- [10] D. J. Lynne, *Complexes and Coxeter groups operations and outer automorphisms*, J. Algebra **113** (1988), no. 2, 339–345.

- [11] J. Malgoire and C. Voisin, *Cartes topologiques infinies et revêtements ramifiés de la sphère*, Cahiers Math. de Montpellier **19** (1980). MR **81m**:57005
- [12] S. V. Matveev, *Algorithms for the recognition of the three-dimensional sphere* (after A. Thompson), Mat.-Sb [Rossiiskaya-Akad.-Nauk.-Mat.-Sbornik] **186** (1995), no. 5, 69–84. MR **96g**:57016
- [13] J. M. Montesinos, *Representing 3-manifolds by universal branching set*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **94** (1983), 109–123. MR **85c**:57001
- [14] D. Singerman, *Universal tessellations*, Rev. Mat. de la Univ. Complutense de Madrid **1** (1988), 111–123. MR **89m**:20053
- [15] A. Thompson, *Thin position and the recognition problem for S^3* , Math. Res. Lett. **5** (1994), 613–630. MR **95k**:57015
- [16] A. Vince, *Combinatorial maps*, J. Combinatorial Theory Ser. B **34** (1983), 1–21. MR **84i**:05048

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, CP 51, UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II, F-34095 MONTPELLIER CEDEX 5, FRANCE

E-mail address: `ladege@univ-montp2.fr`