TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 352, Number 4, Pages 1601–1622
S 0002-9947(99)02525-8
Article electronically published on December 7, 1999

SUR LES INTEGRALES PREMIERES DANS LA CLASSE DE NILSSON D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES HOLOMORPHES

FRÉDÉRIC TOUZET

Abstract. We study two classes of holomorphic differential equations. The first one is constitued by elements admitting solutions defined in an algebraic way (the so called Liouville class) and the second of elements admitting solutions defined in an analytic way (the Nilsson class). We build up links between these two classes using special properties of the holonomy and its results on the monodromy.

Introduction

Un germe de feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbb{C}^n$ est la donnée d'une équation différentielle $\omega = 0$, où $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ est un germe de 1-forme holomorphe intégrable, i.e.: $\omega \wedge d\omega = 0$ telle que $\mathrm{pgcd}(a_i) = 1$; d'un point de vue géométrique, ceci signifie que le lieu singulier $S(\mathcal{F}_\omega)$ de $\mathcal{F}_\omega$ est de codimension supérieure ou égale à deux.

L'étude des germes de feuilletages holomorphes nous conduit naturellement à distinguer ceux admettant une intégrale première, éventuellement dans une classe plus large que la seule classe des intégrales premières holomorphes ou méromorphes.

Une catégorie particulière de telles fonctions, également répandue en théorie de Galois différentielle, est la classe des fonctions Liouvillienes. Il s'agit essentiellement de fonctions constructibles sur le corps de base des fonctions méromorphes par des procédés algébriques simples et nous présentons au chapitre I la caractérisation en termes d'intégration des feuilletages admettant de telles intégrales premières.

Dans ce travail, nous nous intéressons en fait à une classe d'intégrales premières définie par des conditions de croissance et de finitude: la classe de Nilsson (chapitre II). Sous des conditions génériques (de non dicriticité du feuilletage) nous nous proposons d'établir que ces intégrales premières sont Liouvilliennes et possèdent à ce titre une forme explicite, ce qui n'est bien entendu pas le cas pour des fonctions quelconques de la classe de Nilsson.

Notations. Nous désignerons par $\mathcal{O}_n$ (resp. $\mathcal{M}_n$) l'anneau (resp. le corps) des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) à l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Enfin, nous noterons $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le groupe de germes de difféomorphismes de $\mathbb{C}$ fixant 0.

Received by the editors June 11, 1997 and, in revised form, March 3, 1998.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32-XX.

I. Intégrales premières Liouvilliennes

Soit $\mathcal{M}_n$ le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ muni de la famille de dérivations usuelles $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}\}$.

Par définition, une extension Liouvillienne du corps différentiel $(\mathcal{M}_n,(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}))$ est un corps différentiel (k,Δ) tel que $(\mathcal{M}_n,(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n})) = (k_0,\Delta_0)\subset\cdots\subset(k_n,\Delta_n)=(k,\Delta)$ où

- Le corps des constantes de (k_i,Δ_i) est $\mathbb{C}$ et $\Delta_{i|k_{i-1}}=\Delta_{i-1}$.
- $k_i=k_{i-1}(t_i)$ est une extension différentielle de k_{i-1} de l'un des trois types suivants:

1. t_i est algébrique sur k_{i-1},
2. Pour tout dérivation δ de Δ_i, $\frac{\delta t_i}{t_i}$ est élément de k_{i-1},
3. Pour toute dérivation δ de $\Delta_i, \delta t_i$ est un élément de k_{i-1}.

Une fonction Liouvillienne est par définition une fonction appartenant à une extension Liouvillienne de $\mathcal{M}_n$.

Une intégrale première Liouvillienne d'un feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est la donnée d'une fonction Liouvillienne f telle que $\omega\wedge df=0$.

Le théorème qui suit est un énoncé de type Galois différentiel dû à M. Singer ([Sg]) et qui, dans le cadre des germes de feuilletages holomorphes s'énonce ainsi:

Théorème I. *Si un germe de feuilletage holomorphe possède une intégrale première Liouvillienne, il existe un germe η de 1-forme méromorphe fermée telle que $d\omega=\eta\wedge\omega$.*

En particulier, l'existence d'une telle forme η, appelée également facteur intégrant généralisé (f.i.g.) montre que $\mathcal{F}_\omega$ a la configuration géométrique d'un feuilletage "transversalement affine" (voir à ce sujet les travaux de [Ca, Sca]).

II. Fonctions et intégrales premières Nilsson

Cette classe de fonctions se définit de la façon suivante: Soit M^n une variété analytique complexe de dimension n et $X\subset M$ une hypersurface analytique ou plus généralement un ensemble analytique de codimension 1.

On dira qu'une fonction multiforme f définie sur $M\backslash X$ appartient à la classe de Nilsson (relativement à X) $\mathcal{N}_{M,X}$ si elle vérifie les deux conditions suivantes:

α) L'espace de ses déterminations $V(f)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

β) f est à croissance modérée près de X (voir [Bj] pour une définition précise de cette notion).

Rappelons que cette classe de fonctions a été introduit par Nilsson en 1965 ([Nils]) et sont construites par intégration de formes analytiques sur les fibres de morphismes propres. Elle généralise les solutions d'équations différentielles à points singuliers réguliers en dimension 1; en particulier, il s'agit d'une classe de fonctions stable par dérivation et intégration partielle.

Les lemmes qui suivent sont des résultats classiques dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [Bj].

Lemme II.1. *Soit $\pi\colon N^n\mapsto M^n$ un revêtement analytique propre entre deux variétés analytiques de dimension n ramifié en un ensemble analytique δ_π et soit $f\in\mathcal{N}_{M,X}$.*

Alors, il existe un unique fonction $g\in\mathcal{N}_{M,Y}$, $Y=\pi^{-1}(X)\cup\delta_\pi$ telle que $f\circ\pi=g$.

Réciproquement, si $g \in \mathcal{N}_Y$, où $Y \subset N$ désigne une ensemble analytique de codimension 1*, il existe $f \in \mathcal{N}_{M,X}$, $X = \pi(Y)$, telle que $f \circ \pi = g$.*

Lemme II.2. *Soit $f \in \mathcal{N}_{M,X}$ et soit $m \in X$ tel que X soit localement à croisement normal en m (i.e. X est localement défini par l'équation $z_1 \cdots z_r = 0$, $r \leq n$).*

Alors toute branche de f admet en m un développement asymptotique de la forme:

$$f = \sum_{\text{finie}} a_i(z)(\operatorname{Log} z)^{v_i} z^{\mu_i} \text{ où } \begin{cases} z = (z_1, \ldots, z_n), \\ (\operatorname{Log} z)^v = \operatorname{Log} z_1^{v_1} \cdots \operatorname{Log} z_r^{v_r}, v_j \in \mathbb{N}, \\ z^\mu = z_1^{\mu_1} \cdots z_r^{\mu_r}, \mu_j \in \mathbb{C}, \\ a_i \in \mathcal{O}_n. \end{cases}$$

Considérons un germe de feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ admettant une intégrale première Nilsson. De façon plus précise, cela signifie qu'il existe un représentant de $\mathcal{F}_\omega$ défini sur un polydisque U, f Nilsson sur U relativement à X telle que $\omega \wedge df = 0$ et on écrira par abus de langage $f \in \mathcal{N}_X$.

Qui plus est, on peut montrer quitte à étendre f par le théorème d'Hartogs que X est une hypersurface (il n'y a pas de composantes de codimension ≥ 2) contenu dans l'union des séparatrices de ω; en effet, si tel n'était pas le cas, on pourrait prolonger f sur X par "transversalité générique" de $\mathcal{F}_\omega$ (voir les détails dans [To]).

Comme nous allons le voir, les exemples d'intégrales premières Nilsson qui surgissent naturellement sont liés à des conditions d'intégration sur le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$:

II.3. **Exemples d'intégrales premières Nilsson.** Elles sont associées aux feuilletages $\mathcal{F}_\omega$ tels que:

α) $\mathcal{F}_\omega$ admet une intégrale première méromorphe: $\omega \wedge df = 0$, $f \in \mathcal{M}_n$: f est trivialement dans la classe de Nilsson.

β) $\mathcal{F}_\omega$ admet un facteur intégrant méromorphe, i.e.: $d(\frac{\omega}{g}) = 0$, $g \in \mathcal{M}_n$. Suivant un résultat de Cerveau et Mattéi ([Ce, Ma]),

$$\int \frac{\omega}{g} = \sum_{\text{finie}} \lambda_i \operatorname{Log} f_i + H, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}, f_i \in \mathcal{O}_n, H \in \mathcal{M}_n;$$

c'est en particulier une intégrale première dans la classe de Nilsson.

γ) $\mathcal{F}_\omega$ admet une intégrale première Liouvillienne. En effet, on peut conclure dans cette situation à l'existence de l'intégrale première Liouvillienne $f = \int \omega / e^{\int n}$ où η désigne un facteur intégrant généralisé de ω (Théorème I). Sous des hypothèses génériques ([Sca]), on peut en fait choisir η à pôles simples, i.e.: de la forme $\eta = \sum_{\text{finie}} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, f_i \in \mathcal{O}_n$. On vérifie alors aisément que $f \in \mathcal{N}_X$, où $X = \{\prod_i f_i = 0\}$.

Ce travail a pour objet l'étude de la situation réciproque: sachant qu'il existe une intégrale première Nilsson f, peut-on conclure à l'existence d'une intégrale première Liouville? Ou mieux, peut-on factoriser "simplement" f en une intégrale première Liouville "élémentaire"?

Sous des hypothèses raisonnables, nous disposons effectivement d'un tel résultat:

II.4. **Théorème principal** ([To]). *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage admettant une intégrale première Nilsson f. Supposons que $\mathcal{F}_\omega$ soit non dicritique.*[1]

[1]Rappelons qu'un feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbb{C}^n$ est dit non dicritique si pour $n = 2$, $\mathcal{F}_\omega$ admet un nombre fini de courbes invariantes (séparatrices) passant par l'origine et pour $n > 2$, sil existe un 2-plan $\mathcal{P}$ transverse à $\mathcal{F}_\omega$ tel que $\mathcal{F}_\omega$ en restriction à $\mathcal{P}$ soit dicritique au sens précédent.

Alors f est Liouvillienne et s'explicite sous l'une des trois formes suivantes:

*α) $f=\sum_{\text{finie}} a_i(g)(\operatorname{Log} g)^{n_i} g^{\lambda_i}, a_i \in \mathcal{O}_1, n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}$,
g étant une intégrale première holomorphe de $\mathcal{F}_\omega$ qui n'est pas une puissance.*

*β) $f=\sum_{\text{finie}} a_i(\operatorname{Log} g)^{n_i} g^{\lambda_i}, n_i \in \mathbb{N}, a_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$,
g désignant cette fois une intégrale première multivaluée de la forme $\prod_{\text{finie}} f_i^{\mu_i}, \mu_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in \mathcal{O}_n$ ("élémentaire" dans la terminologie de* [Ce, Ma]*).*

*γ) $f=P(\int \frac{\omega}{e^{\int \eta}})$, P étant un polynôme à coefficients complexes et η un facteur intégrant généralisé de ω à **pôles simples**.*

Commentaires et rappels. Réciproquement, il est facile de constater que de telles fonctions définissent bien des intégrales premières dans la classe de Nilsson.

Sous cette hypothèse de dicriticité, nous donnerons un contre exemple au Théorème II.4 et de façon plus générale nous établirons l'existence d'une intégrale première Nilsson qui n'est pas Liouvillienne.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, nous aimerions en donner une idée générale. Nous la détaillerons dans le cadre de la dimension $n=2$, la généralisation en dimension quelconque résultant simplement de théorèmes d'extensions méromorphes, variantes du théorème de Lévi classique (cf. [To]).

Rappelons avant tout qu'il existe une application π de réduction du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ ([Ma, Mo]) composé d'une suite d'éclatements ponctuels tel que:

a) Les composantes du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ sont séparatrices du feuilletage éclaté $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ (dans le cas non dicritique).

b) Le diviseur $\pi^{-1}(0)$ porte les singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$.

c) Au voisinage de chaque singularité, $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est donné par une forme dont le jet d'ordre 1 s'écrit

$$(*) \qquad \lambda_1 x\,dy+\lambda_2 x\,dy, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^-$$

ou

$(**)$ $\qquad xdy$. De telles formes sont dites "réduites".

La preuve procède en trois étapes, chaque étape correspondant respectivement à $n(\mathcal{F}_\omega)=0$, $n(\mathcal{F}_\omega)=1$ et $n(\mathcal{F}_\omega)$ quelconque, où $n(\mathcal{F}_\omega)$ désigne le nombre minimal d'éclatements nécessaire à la réduction du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$.

Première étape: $n(\mathcal{F}_\omega)=0$. Les classes formelles de telles formes réduites sont déterminées par des listes finies d'invariants et l'on dispose ainsi de formes normales formelles $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ (dont nous donnons le détail dans le Chapitre III). L'espace des modules attaché à chaque forme normale est en général loin d'être simple (voir à ce sujet [Ma, Ra$_1$], [Ma, Ra$_2$], [Pe, Yo]). En revanche, nous montrons que cet espace est trivial dès que l'on se restreint à classe des feuilletages réduits admettant une intégrale première Nilsson.

Précisément nous établissons le

Théorème de rigidité. *Soit $\mathcal{F}_\omega$ réduit, $\mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega)$ sa forme normale formelle. Supposons que $\mathcal{F}$ admette une intégrale première Nilsson. Alors $\mathcal{F}$ est conjugué analytiquement à $\mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega)$, i.e.: il existe un difféomorphisme Φ holomorphe de $\mathbb{C}^2_{,0}$ tel que $\Phi^*\mathcal{F}_\omega \wedge \mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega)=0$.*

La preuve du théorème de rigidité, purement algébrique, s'appuie sur le théorème d'approximation d'Artin ([Ar]). Donnons en une idée:

Soit E l'ensemble des formes normales formelles dont l'espace des modules analytiques est non trivial et soit $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = E$.

L'ensemble des séparatrices de $\mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega)$ est une hypersurface X à croisements normaux et on sait dans ce cas expliciter l'ensemble $\mathcal{N}_X$ des fonctions de type Nilsson sur le complément de X. Par des procédés calculatoires, on peut alors établir la forme générale des intégrales premières Nilsson analytiques et formelles (i.e.: dans $\widehat{\mathcal{N}}_X = \widehat{\mathcal{O}}_2 \otimes_{\mathcal{O}_2} \mathcal{N}_X$); on constate en fait qu'il n'en existe pas dans $\widehat{\mathcal{N}}_X \backslash \mathcal{N}_X$. Si $\widehat{\Phi}$ désigne le difféomorphisme formel conjuguant $\mathcal{F}$ à sa forme normale $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ ($\widehat{\Phi}\mathcal{F} \wedge \mathcal{N}(\mathcal{F}) = 0$), $g = f \circ \widehat{\Phi} \in \widehat{\mathcal{N}}_X$ est donc en fait un élément de $\mathcal{N}_X$. Une adaptation technique du théorème d'Artin permet alors de conclure à l'existence d'un difféomorphisme *holomorphe* Φ tel que $g = f \circ \Phi$, ce qui entraîne manifestement que $\Phi^*\mathcal{F} \wedge \mathcal{N}(\mathcal{F}) = 0$. Le Théorème II.4 résulte alors d'un calcul explicite des intégrales premières Nilsson des formes normales.

Deuxième étape: $n(\mathcal{F}_\omega) = 1$**.** Le diviseur exceptionnel, réduit à une droite projective $\mathbb{CP}(1)$, est une séparatrice du feuilletage éclaté $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. Sous l'hypothèse que $\mathcal{F}$ admet une intégrale première Nilsson f, nous établissons le Théorème II.4.

La démarche est dans ce cas la suivante: Soit H_T le groupe d'holonomie projectif par rapport à une droite T transverse à $\mathbb{CP}(1)$ en un point régulier de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. Par jordanisation de l'opérateur de monodromie autour du diviseur, nous disposons de modèles locaux simples d'éléments de l'espaces des déterminations de l'éclatée F de f. En composant ces modèles par des germes de difféomorphismes de $\mathbb{C}, 0$ tangents à l'identité à un ordre arbitrairement grand, on obtient un espace de dimension infinie. On peut notamment extraire une suite de tels germes dans un groupe non résoluble. Compte tenu de la description de la monodromie par l'holonomie (que nous expliciterons dans la suite) et de la finitude de l'espace des déterminations de $\tilde{f}$, nous en déduisons que H_T doit être résoluble.

Le groupe de monodromie de f (qui s'identifie à un sous groupe de matrices de $Gl(n, \mathbb{C})$) est, dans la situation où toutes les singularités sont réduites, complètement déterminé par le groupe d'holonomie. En particulier, il sera résoluble si H_T est résoluble. Cela implique en particulier qu'il est triangularisable. Il n'est pas difficile, à partir de là, d'exhiber une intégrale première Nilsson f_0 construite à l'aide de déterminations de f telle que $\eta = \frac{df_0}{f_0}$ soit un facteur intégrant généralisé du feuilletage. Ceci entraîne que $f_0 = \int \frac{\omega}{e^{\int \eta}}$ est Liouvillienne.

Nous montrons ensuite que f se factorise par un polynôme ou un polynôme de Fuchs en f_0. Les preuves sont bâties sur deux approches différentes:

La première approche consiste à se ramener à la première étape: la restriction de l'éclatée F_0 de f_0 à certains types de singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{CP}(1)$ est précisément celle dans laquelle toutes les intégrales premières Nilsson se factorisent.

La deuxième approche est plus géométrique; elle repose sur le comportement du "Wronskien" attaché à une symétrie transverse du feuilletage éclaté invariante par le feuilletage.

Troisième étape: $n(\mathcal{F})$ **quelconque.** Nous n'en dirons dans cette introduction que quelques mots. En général et contrairement au cas $n(\mathcal{F}) = 1$, l'holonomie n'agit plus transitivement sur la fibre d'une feuille. Ainsi, elle ne décrit que très partiellement le groupe de monodromie de f. Il faut alors lui substituer l'action de groupes plus large: les groupes d'invariance introduits par Cerveau et Mattei

([Ce, Ma]). En reproduisant la démarche initiée dans la seconde étape, nous sommes alors à même de montrer le Théorème II.4.

Ce théorème n'est plus vrai en toute généralité dans le cas dicritique. Il est par exemple facile, en invoquant la correspondance de Riemann Hilbert, de donner, pour le feuilletage défini sur $\mathbb{C}^2$ par le champ radial $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, une intégrale première Nilsson qui n'est pas Liouvillienne. Nous nous emploierons à décrire ce cas à l'issue du dernier chapitre.

III. Preuve du théorème principal. Le cas réduit: $n(\mathcal{F}_\omega) = 0$

Soit ω réduite de type $(*)$ ou $(**)$; ceci correspond à un modèle final de réduction d'une équation générale. On sait depuis Briot et Bouquet ([Br, Bo]) que $\mathcal{F}_\omega$ admet au plus deux courbes analytiques invariantes (séparatrices) qu'on peut, par un changement adéquat de coordonnées analytiques, supposer être contenues dans l'ensemble à croisement normal $\{xy = 0\}$. Rappelons en premier lieu l'écriture des différentes formes normales formelles ainsi que les intégrales premières Nilsson “élémentaires” (I.P) qui leur sont associées (voir également ([Ma, Ra$_1$], [Ma, Ra$_2$])).

$$\text{Cas linéaires}\begin{cases}\mathbf{a}-\omega_N = xdy+\lambda y\,dx, \lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q},\\ \quad \text{I.P}: x^\lambda y,\\ \mathbf{b}-\omega_N = xdy+\lambda y\,dx, \lambda=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_*^+,\\ \quad \text{I.P}: x^p y^q.\end{cases}$$

$$\text{Case résonnant}\begin{cases}\mathbf{c}-\omega_N=\omega_{k,\mu}=p(1+(\mu-1)u^k)y\,dx+q(1+\mu u^k)x\,dy,\\ \qquad k\in\mathbb{N},\mu\in\mathbb{C}, u=x^py^q,\\ \qquad \text{I.P}:\ f_{k,\mu}=p(\mu-1)\operatorname{Log}x+q\mu\operatorname{Log}y+\frac{1}{ku^k}(u=x^py^q).\end{cases}$$

$$\text{Cas dégénéré (ou noeud selle)}\begin{cases}\mathbf{d}-\omega_{p,\mu}=x^{p+1}dy-y(1+\mu x^p)dx, p\geq 1,\mu\in\mathbb{C},\\ \qquad \text{I.P}: f_{p,\mu}=\mu\operatorname{Log}x-\operatorname{Log}y-\frac{1}{px^p}.\end{cases}$$

Notons que le cas b) est le seul ca où l'espace des modules est trivial ([Ce, Ma]), i.e.: tout feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ formellement conjugué à $\mathcal{F}_\omega$ lui est analytiquement conjugué.

Le théorème qui suit, et que nous démontrerons dans ce chapitre, établit un résultat de rigidité formelle lié à l'existence d'intégrales premières dans la classe de Nilsson.

III.1. **Théorème de rigidité.** *Supposons que $\mathcal{F}_\omega$ admette une intégrale première Nilsson f, alors*:

i) *f est Liouvillienne*

ii) *ω est analytiquement conjuguée à sa forme normale formelle.*

Remarquons que l'assertion i) est évidente, puisque les séparatrices forment un système à croisements normaux: on sait dans ce cas expliciter la forme générale d'une fonction de type Nilsson sur le complémentaire des séparatrices. Elle admet l'écriture:

$$f(x,y)=\sum_{i\text{ finie}} a_i(x,y)x^{\alpha_i}y^{\beta_i}(\operatorname{Log}x)^{m_i}(\operatorname{Log}y)^{n_i}$$

a_i holomorphes, $\alpha_i, \beta_i\in\mathbb{C}$, m_i, $n_i\in\mathbb{N}$, et on vérifie directement qu'elle est de type Liouville (voir [Bj]).

L'assertion ii) établit en fait une équivalence, puisqu'il est aisé d'exhiber une intégrale première Nilsson opour chaque forme normale formelle. Sa démonstration s'appuie:

—d'une part, sur des théorèmes de factorisation d'intégrales premières Nilsson "élémentaires"

—d'autre part, sur l'utilisation du principe d'approximation d'Artin dont nous donnerons un énoncé dans la suite du chapitre.

III.2. **Première étape de la preuve du Théorème III.1: propriétés de factorisation.** Pour chaque classe formelle ω_N, on se propose d'expliciter la forme générale d'une intégrale première dans $\mathcal{N}_X$ comme facteur d'une intégrale première Nilsson "élémentaire". Avant tout, procédons à l'identification qui suit: soit $f \in \mathcal{N}_{U,X}(X = \{xy = 0\}$, U est un polydisque). Considérons une restriction $\underline{f}$ de f à un ouvert polysectoriel simplement connexe du type

$$U_{R,\varepsilon} = \{|x| < R, |y| < R, |\operatorname{Arg} x| < \varepsilon, |\operatorname{Arg} y| < \varepsilon\}$$

R, $\varepsilon > 0$ assez petits pour que ceci ait un sens.

Ainsi

$$\underline{f}(x,y) = \sum_{i \text{ finie}} a_i(x,y) x^{\alpha_i} y^{\beta_i} (\operatorname{Log} x)^{m_i} (\operatorname{Log} y)^{n_i}$$

où les symboles $x^\alpha, y^\beta, \operatorname{Log} x, \operatorname{Log} y$ désignent les déterminations principales de ces fonctions.

Nous désignerons par $\mathcal{N}(U_{R,\varepsilon} \backslash X)$ l'ensemble de telles restrictions et nous identifierons $\mathcal{N}_X$ à la limite inductive $\lim_{R,\varepsilon \to 0} \mathcal{N}(U_{R,\varepsilon} \backslash X)$ qui représente la $\mathcal{O}_2$ algèbres des "germes" des fonctions de type Nilsson sur le complément de X.

On peut également définir une extension formelle $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{O}}_2 \otimes_{\mathcal{O}_2} \mathcal{N}_X$ où $\widehat{\mathcal{O}}_2$ désigne le complété formé de $\mathcal{O}_2$.

On se bornera à détailler le cas $\omega_N = xdy + \lambda y\, dx$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$; le traitement des autres reposant sur le même principe. Cette factorisation est donnée par les 4 lemmes suivants:

Lemme III.2.1. *Soit $\omega_N = xdy + \lambda y\, dx, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$, et $f \in \mathcal{N}_X$ telle que $\omega \wedge df = 0$; alors $f(x,y) = \sum_{i \text{ finie}} c_i (x^\lambda y)^{\alpha_i} (\lambda \log x + \log y)^{n_i}$, $c_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$.*

Lemme III.2.2. *Soit $\omega_N = xdy + \lambda y\, dx$, $\lambda = \frac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(p \wedge q) = 1$, et $f \in \mathcal{N}_X$ telle que $\omega \wedge df = 0$; alors $f(x,y) = \sum_{i \text{ finie}} \varphi_i (x^p y^q)^{\alpha_i} (p \log x + q \log y)^{n_i}$, $\varphi_i \in \mathcal{O}_1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$.*

Lemme III.2.3. *Soit $\omega_N = \omega_{k,\mu}$ et $f \in \mathcal{N}_X$ telle que $\omega \wedge df = 0$; alors $f = P(f_{k,\mu})$, $P \in \mathbb{C}[t]$.*

Lemme III.2.4. *Soit $\omega_N = \omega_{p,\mu}$ et $f \in \mathcal{N}_X$ telle que $\omega \wedge df = 0$; alors $f = P(f_{q,\mu})$, $P \in \mathbb{C}[t]$.*

Avant d'en faire la démonstration, il sera commode d'introduire le formalisme algébrique suivant:

III.3. **Éléments d'algèbre différentielle.** Les résultats bien connus qui sont exposés dans cette section sont par exemple présentés dans l'article [Ro] de M. Rosenlicht.

III.3.1. *Corps différentiels et dérivation universelle.* Soit L un corps commutatif, K un sous corps de L et M un L-espace vectoriel. Une K dérivation sur L et par définition une application additive $\delta\colon L \mapsto M$ telle que:

i) pour tout $(x, y) \in L^2$, $\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$

ii) pour tout $(x, y) \in K \times L$, $\delta(xy) = x\delta(y)$ (en particulier, δ est un morphisme de K espace vectoriels).

Dérivation universelle. Il existe un L espace vectoriel $\Omega_{L/K}$ et une dérivation $\delta\colon L \to \Omega_{L/K}$ possédant la propriété universelle suivante: pour toute K dérivation $\delta'\colon L \to M$, il existe un morphisme Φ de L-espace vectoriel tel que le diagramme cidessous commute

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, mapsto, "\delta"] \arrow[d, "\delta'"'] & \Omega_{L/K} \arrow[dl, "\Phi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

En outre, $\Omega_{L/K}$ est unique à isomorphisme de L-espace vectoriels près.

Rappelons-en la construction. Notons $i_x\colon L \mapsto L^{(L)}$ l'injection canonique sur le $x^{\text{ième}}$ facteur, $x \in L$, et $e_x = i_x(\mathbf{1}_L)$, où $\mathbf{1}_L$ désigne l'élément unité de L. Soit $(\mathcal{R})$ le sous espace de $L^{(L)}$ engendré par les relations:

$$\begin{cases} e_{x+y} - e_x - e_y, e_{xy} - xey - ye_x, (x, y) \in L^2, \\ e_{xy} - xey, (x, y) \in K \times L. \end{cases}$$

On prend alors $\Omega_{L/K} = L^{(L)}/(\mathcal{R})$ et on définit δ par: pour tout $x \in L$, $\delta(x) = e_x \operatorname{mod}(\mathcal{R})$. $\Omega_{L/K}$ est appelé espace vectoriel des K différentielles de L.

III.3.2. *Propriétés générales.* Soit $D\colon L \to L$ une dérivation telle que $DK \subset K$. D induit alors une application $D^1\colon \Omega_{L/K} \mapsto \Omega_{L/K}$ dont les caractéristiques sont données par le:

Théorème III.3.3. *Il existe une unique application additive $D^1\colon \Omega_{L/K} \mapsto \Omega_{L/K}$ telle que*:

i) *pour tout $f \in L$, pour tout $\omega \in \Omega_{L/K}$, $D^1(f\omega) = fD^1(\omega) + D(f) \cdot \omega$*

ii) *pour tout $f \in L$, $D^1(\delta(f)) = \delta(D(f))$.*

Preuve. Considérons l'élément de $L^{(L)}$, $\tilde\omega = \sum_{x\in L;\text{finie}} f_x e_x$, $f_x \in L$, $\tilde\omega \in L^{(L)}$. On définit $\widetilde{D}_1(\tilde\omega) = \sum_{x\in L;\text{finie}}(D(f_x)e_x + f_x e_{D(x)})$, qui induit par passage au quotient l'application D^1 ayant les propriétés du théorème.

Rappelons la structure du couple $(\Omega_{L/K}, \delta)$. On vérifie aisément que le noyau de δ est formé des éléments de L algébriques sur K. Ainsi, la dimension de $\Omega_{L/K}$, en tant que L espace vectoriel, n'est liée qu'au degré de transcendance de L sur K.

Plus précisément, on a le:

Théorème III.3.4. *Soit L un corps et $K \subset L$ un sous corps. On suppose que L est une extension séparable de K et on se donne une base de transcendance (x_α) de l sur K. Alors, la famille $(\delta(x_\alpha))$ est une base de $\Omega_{L/K}$ en tant que L espace vectoriel.*

Preuve. Nous sommes maintenant à même d'entamer la démonstration des lemmes qui précèdent.

III.4. **Preuve du Lemme III.2.1.** Nous reprenons les notations introduites dans la Section III.3. Appelons $\mathcal{A}_X$ l'algèbre engendré sur $\mathcal{O}_2$ par les germes de $\mathcal{N}_X$ de la forme $x^\alpha y^\beta$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Visiblement, $f(x,y)=P(\log x,\log y)$ où $P\in\mathcal{A}_X[X_1,X_2]$; cette écriture est d'ailleurs unique car on peut vérifier facilement que $\log x$ et $\log y$ sont algébriquement indépendants sur $K=\mathrm{Frac}(\mathcal{A}_X)$. On posera donc $X_1=\log x$ et $X_2=\log y$. La preuve du lemme procède par récurrence sur le degré d de P.

a) $d=0$: On peut écrire

$$f(x,y)=\sum_{\ell;\text{finie}} a_\ell(x,y)x^{\alpha_\ell}y^{\beta_\ell},\quad \begin{cases} a_\ell\in\mathcal{O}_2,\\ \alpha_\ell,\beta_\ell\in\mathbb{C},\end{cases}$$

avec la condition

$$\begin{cases}\alpha\ell\equiv\alpha_m \bmod \mathbb{Z}\\ \text{ou}\\ \beta_\ell\equiv\beta_m \bmod\mathbb{Z}\end{cases}\qquad\text{pour tout } \ell,m,\ell\neq m.$$

Par action de la monodromie autour de $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$, on constate alors que pour tout i, $a_\ell(x,y)x^{\alpha_\ell}y^{\beta_\ell}$ est dans l'espace des déterminations de f et qu'ainsi $D(a_\ell(x,y)x^{\alpha_\ell}y^{\beta_\ell})=0$, où $D=x\frac{\partial}{\partial x}-\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$. On vérifie alors par un calcul formel immédiat que, pour tout ℓ, $a_\ell\in\mathbb{C}$ et $\frac{\alpha_\ell}{\beta_\ell}=\lambda$.

b) $d>0$: Soit $L=K(X_1,X_2)$; on lui associe le couple $(\Omega_{L/K},\delta)$. Manifestement $\delta f=\frac{\partial P}{\partial X_1}\delta X_1+\frac{\partial P}{\partial X_2}\delta X_2$. De plus $DK\subset K$, et par conséquent (cf. Théorème III.3.3), D induit une application $D^1\colon\Omega_{L/K}\mapsto\Omega_{L/K}$, tell que:

$$\begin{aligned}D^1(\delta f)=D\left(\frac{\partial P}{\partial X_1}\right)\delta X_1+D\left(\frac{\partial P}{\partial X_2}\right)\delta X_2+\left(\frac{\partial P}{\partial X_1}\right)D^1(\delta X_1)\\ +D\left(\frac{\partial P}{\partial X_2}\right)D^1(\delta X_2)=\delta(Df)=0\end{aligned}$$

et finalement $D(\frac{\partial P}{\partial X_1})=D(\frac{\partial P}{\partial X_2})=0$.

Par récurrence $\partial P/\partial X_1=P_1(\lambda X_1+X_2)$, $\partial P/\partial X_1=P_2(\lambda X_1+X_2)$, $P_1,P_2\in\mathcal{A}_{1,X}[X_1,X_2]$ où $\mathcal{A}_{1,X}\subset\mathcal{N}_X$ désigne l'algèbre engendré sur $\mathbb{C}$ par les fonctions $(x^\lambda y)^\mu$, $\mu\in\mathbb{C}$.

En posant $U=\lambda X_1+X_2$ et en utilisant que la 1-forme $\omega=(\partial P/\partial X_1)dX_1+(\partial P/\partial X_2)dX_2$ est fermée, on en déduit que $\omega=R(U)dU+CdX_1$ où $R\in\mathcal{A}_{1,X}[U]$ et $C\in\mathbb{C}$. Par conséquent $f=\widetilde{R}(U)+CX_1+P(0,0)$ avec $d\widetilde{R}/dU=R$ et $\widetilde{R}(0,0)=0$. Ainsi, $g=CX_1+P(0,0)$ est une intégrale première.

Écrivons $P(0,0)=\sum_{i;\text{finie}}a_i(x,y)x^{\alpha_\ell}y^{\beta_\ell}$ sous la même forme que celle donnée en a). Soit g_1 et g_2 les prolongements analytiques de g autour des axes respectifs $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$; on a

$$g_1-g=\sum_{\ell;\text{finie}}(e^{2i\pi\alpha\ell}-1)a_\ell(x,y)x^{\alpha_\ell}y^{\beta_\ell}-2i\pi$$

et

$$g_2-g=\sum_{\ell;\text{finie}}(e^{2i\pi\alpha\ell}-1)a_\ell(x,y)x^{\alpha_\ell}y^{\beta_\ell}.$$

Si il existe un indice ℓ_0 tel que α_{ℓ_0} ou β_{ℓ_0} n'est pas entier, on constate de même qu'en a) que $a_{\ell_0}(x,y)x^{\alpha_{\ell_0}}y^{\beta_{\ell_0}}$ est une intégrale première et s'écrit donc sous la forme donnée en a).

On déduit que CX_1 ou $CX_1 + a_{\ell_1}(x,y)x^{\alpha_{\ell_1}}y^{\beta_{\ell_1}}$ (où ℓ_1 est un indice tel que $(\alpha_{\ell_1},\beta_{\ell_1}) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$) sont des intégrales premières. Par un calcul formel immédiat, ceci implique que $C = a_{\ell_1} = 0$.

Remarque III.4.1. La démonstration des Lemmes III.2.2 à III.2.4 reproduit cette preuve. En outre, $\operatorname{Log} x$ et $\operatorname{Log} y$ restent algébriquement indépendants sur $\operatorname{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_2 \otimes_{\mathcal{O}_2} \mathcal{A}_X)$ et les techniques utilisées montrent alors que le résultat n'est pas altéré si l'on remplace $\mathcal{N}_X$ par $\widehat{\mathcal{N}}_X$. On montre ainsi l'équivalent formel des lemmes précédents.

Lemme III.4.2. *Soit* $\omega_N + xdy + \lambda y\,dx$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$, *et* $\hat f \in \widehat{\mathcal{N}}_X$ *telle que* $\omega_N \wedge d\hat f = 0$; *alors* $\hat f(x,y) = \sum_{i;\text{finie}} c_i (x^\lambda y)^{\alpha_i}(\lambda \log x + \log y)^{n_i}$, $c_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{C}$.

Lemme III.4.3. *Soit* $\omega_N = xdy + \lambda y\,dx$, $\lambda = p/q$, $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(p\wedge q) = 1$, *et* $\hat f \in \widehat{\mathcal{N}}_X$ *telle que* $\omega_N \wedge d\hat f = 0$; *alors* $\hat f(x,y) = \sum_{i;\text{finie}} \hat c_i(x^p y^q)(x^p y^q)^{\alpha_i}$ $(p\log x + q\log y)^{n_i}$, $\hat c_i \in \widehat{\mathcal{O}}_1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$.

Lemme III.4.4. *Soit* $\omega_N = \omega_{p,\mu}$ *et* $\hat f \in \widehat{\mathcal{N}}_X$ *telle que* $\omega_N \wedge d\hat f = 0$; *alors* $\hat f(x,y) = P(f_{p,\mu})$, $P \in \mathbb{C}[X]$.

Remarque III.4.5. Dans les situations formelles précédentes, les cas où $\hat f \in \widehat{\mathcal{N}}_X - \mathcal{N}_X$ n'ont lieu que dans un cas particulier où l'espace des modules associés à ω_N est trivial (cf. voir début de ce chapitre).

III.5. **Deuxième étape de la preuve: Application du principe d'Artin.** Rappelons en dans un premier temps un éconcé.

Théorème d'approximation d'Artin ([Ar]). *Soit* $F\colon \mathbb{C}^p_{,0}\times\mathbb{C}^q_{,0} \mapsto \mathbb{C}^r_{,0}$ *un germe d'applicaiton holomorphe. Supposons que l'équation implicite* $F(x,y) = 0$ *admette une solution formelle* $\hat y(x)$. *Alors, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe une solution analytique* $y_k(x)$ *telle que* $J_k y_k = J_k \hat y$, *où* J_k *désigne le jet d'ordre* k.

Soit ω réduite admettant une intégrale première Nilsson f et $\widehat\Phi = (\widehat\Phi_1, \widehat\Phi_2)$ le difféomorphisme de $\widehat{\operatorname{Diff}}_2$ la conjuguant à sa forme normale formelle ω_N.

On peut supposer, après conjugaison analytique que:

i) $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$ sont les séparatrices de ω lorsque ω admet deux séparatrices analytiques.

ii) $\{x=0\}$ est la séparatrice de ω lorsque ω admet une seule séparatrice analytique (cas de certains noeuds selle).

Dans le cas i), $(x=0)$ et $(y=0)$ sont invariants respectivement par $\widehat\Phi_1$ et $\widehat\Phi_2$, quitte à conjuguer ω par un difféomorphisme du type (ax, by), $a, b \in \mathbb{C}^*$, on peut donc supposer que $\widehat\Phi$ est de la forme $\widehat\Phi = (x(1+\widehat\Psi_1(x,y)), y(1+\widehat\Psi_2(x,y)), \widehat\Psi_i \in \widehat{\mathcal{O}}_2$, $\widehat\Psi_i(0) = 0$, $i = 1,2$. Dans le cas ii), on peut supposer que $\{x=0\}$ est invariant par $\widehat\Phi_1$, de sorte que, quitte à conuguer ω par (ax,y), $a \in \mathbb{C}^*$, $\widehat\Phi = (x(1+\widehat\Psi(x,y)$, $\hat\varphi(x,y))$, $\widehat\Psi$, $\hat\varphi \in \widehat{\mathcal{O}}_2$, $\widehat\Psi(0) = \hat\varphi(0) = 0$.

Dans les deux cas, on vérifie bien que la composée $f\circ\widehat\Phi$ est un élément de $\widehat{\mathcal{N}}_X$.

D'après la Remarque III.4.5, on constate, dans les deux cas i) et ii), que $f\circ\widehat\Phi$ (qui est a priori une intégrale première de ω_N dans $\widehat{\mathcal{N}}_X$) est en fait un germe convergent de $\mathcal{N}_X$ dès que l'espace des modules analytiques attaché à la forme normale ω_N; c'est-à-dire dés que ω_N ne satisfait pas les hypothèses du Lemme III.4.2. Nous nous placerons désormais dans cette dernière situation.

Il est clair que le Théorème II.1 sera établi si l'on exhibe $\varphi \in \mathrm{Diff}_2$ tel que $f \circ \varphi = g$. Dans le cas où f et g sont holomorphes, c'est une conséquence directe du principe d'Artin. Dans le cas présent, où $f, g \in \mathcal{N}_X$, nous nous y ramenons par l'adaptation qui va suivre.

Nous ne pouvons être dans le cas ii): ceci impliquerait en effet que $f \circ \widehat{\Phi}$ ne comporte pas de termes en $\operatorname{Log} y$ et en y^α, ce qui est incompatible avec la description des intégrales premières Nilsson des formes normales.

Il reste à examiner la cas i), c'est-à-dire la situation où l'union des séparatrices de ω est l'ensemble analytique $X = \{xy = 0\}$.

Soit $\mathcal{A}_1$ l'algèbre engendré sur $\mathcal{O}_2$ par les éléments de la forme $1/x^n, y^m$, $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathcal{A}_2$ l'algèbre engendrée sur $\mathcal{O}_2$ par les éléments de $\mathcal{N}_X$, $X_{\alpha\beta} = x^\alpha y^\beta$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ et $X_1 = \operatorname{Log} x$, $X_2 = \operatorname{Log} y$.

Manifestement, $\widehat{\mathcal{N}}_X = \widehat{\mathcal{A}}_1 \otimes_{\mathcal{O}_2} \mathcal{A}_2$, où $\widehat{\mathcal{A}}_1$ désigne la $\mathcal{O}_2$ algèbre $\widehat{\mathcal{O}}_2 \otimes_{\mathcal{O}_2} \mathcal{A}_1$. L'application $\widehat{\Phi}$ définit, par composition, un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{N}}_X$, noté $\widehat{\Phi}^*$.

Remarquons que $\widehat{\Phi}^* \widehat{\mathcal{O}}_2 = \widehat{\mathcal{O}}_2$ et $\widehat{\Phi}^* \widehat{\mathcal{A}}_1 = \widehat{\mathcal{A}}_1$. Sur les générateurs $X_{\alpha\beta}, X_1, X_2, \widehat{\Phi}^*$ s'exprime de la façon suivante:

$\widehat{\Phi}^*(X_{\alpha\beta}) = X_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(\widehat{\Psi}_1, \widehat{\Psi}_2)$ tel que, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $h_{\alpha\beta}$ étant des unités de $\mathcal{O}_2$.

$\widehat{\Phi}^*(X_1) = X_1 + g_1(\widehat{\Psi}_1)$, $g_1 \in \mathcal{O}_1$.

$\widehat{\Phi}^*(X_2) = X_2 + g_2(\widehat{\Psi}_2)$, $g_2 \in \mathcal{O}_1$.

Les fonctions $h_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, g_i, $i = 1,2$ ne dépendant pas du choix de $\widehat{\Psi}_1$ et $\widehat{\Psi}_2$.

Soit π la projection de l'anneau de polynômes $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_1[z_{\alpha\beta}, z_1, z_2]_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2}$ sur $\widehat{\mathcal{N}}_X$, donnée sur les indéterminées par:

$\pi(z_{\alpha\beta}) = X_{\alpha\beta}$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$,

$\pi(z_1) = X_1$,

$\pi(z_2) = X_2$.

De façon canonique, le morphisme $\widehat{\Phi}^*$ induit sur $\widehat{\mathcal{A}}$ un isomorphisme (qu'on notera également $\widehat{\Phi}^*$) tel que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{A}} \arrow[r, mapsto, "\widehat{\Phi}^*"] \arrow[d, "\pi"] & \widehat{\mathcal{A}} \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{\mathcal{N}}_X \arrow[r, mapsto, "\widehat{\Phi}^*"'] & \widehat{\mathcal{N}}_X \end{tikzcd}$$

1$^{\text{er}}$ cas: $\omega_N = xdy + \lambda y\,dx, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$. D'après le Lemma III.4.2, il existe $G \in \widehat{\mathcal{A}}$, $\pi(G) = g$, tel que $G = \sum_{i,j \text{ finie}} c_{ij} X_{\lambda\nu_i,\nu_i} z_1 z_2$ où $c_{ij} \in \mathbb{C}, \nu_i \in \mathbb{C}, m_i, n_i \in \mathbb{N}$. On vérifie alors aisément que $F = G \circ \widehat{\Phi}^{-1} = p(z_1, z_2)$ où p est un polynôme tel que le coefficient de chaque monôme $z_1^{m_i' n_i'}$ est de la forme

$$a_{m_i n_i} = \sum_{j;\text{finie}} \hat{h}_{ij}(x,y) X_{\lambda\nu_i,\nu_i}, \qquad \hat{h}_{ij} \in \widehat{\mathcal{O}}_2,$$

et

$$\nu_{ij} \in \mathbb{C}, \nu_{ij_1} \neq \nu_{ij_2} \quad \text{si } j_1 \neq j_2.$$

En particulier, $a_{m_i n_i} \in \widehat{\mathcal{A}}_1[z_{\alpha\beta}]_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2}$.

Affirmation. Les a_{ij} sont des éléments de $\mathcal{A}_1[z_{\alpha\beta}]_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2}$.

En effet, $\pi(G\circ(\widehat{\Phi}^*)^{-1}) = f \in \mathcal{N}_X$. Comme $X_1 = \operatorname{Log} x$ et $X_2 = \operatorname{Log} y$ sont algébriquement indépendants sur $\operatorname{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_2 \otimes_{\mathcal{O}_2} \mathcal{A}_X)$ (où l'on rappelle que $\mathcal{A}_X$ est l'algèbre engendré sur $\mathcal{O}_2$ par $X_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$), on en déduit que $\pi(a_{ij}) \in \mathcal{A}_X$, pour tout i,j, i.e, $\sum_{j;\text{finie}} \hat{h}_{ij}(x,y)(x^\lambda y)^{\nu_{ij}} \in \mathcal{A}_X$.

Par prolongement analytique, les éléments

$$\sum_{j;\text{finie}} \hat{h}_{ij}(x,y)e^{2i\pi\lambda\nu_{ij}}(x^\lambda,y)^{\nu_{ij}}, \quad \sum_{j;\text{finie}} \hat{h}_{ij}(x,y)e^{2i\pi\nu_{ij}}(x^\lambda y)^{\nu_{ij}}$$

sont encore dans $\mathcal{A}_X$. Par combinaisons linéaires, on en déduit que, pour tout $i,j, \hat{h}_{ij}(x,y)(x^\lambda y)^{\nu_{ij}} \in \mathcal{A}_X$, puis que $\hat{h}_{ij}(x,y)\in\mathcal{A}_X$. Il en résulte alors que $\hat{h}_{ij}\in\mathcal{O}_2$.

Par suite, $F \in \mathcal{A}_1[z_{\alpha\beta}, z_1, z_2]_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2}$.

On en déduit que

$$\widehat{\Phi}^* F = F\circ\widehat{\Phi} = \xi_F(x,y,z_{\alpha_0\beta_0},\dots,z_{\alpha_n\beta_n},z_1,z_2,\widehat{\Psi}_1,\widehat{\Psi}_2)$$

où ξ_F est un germe d'application holomorphe à l'origine ne dépendant pas du choix de $\widehat{\Psi}_1$ et $\widehat{\Psi}_2$.

On dispose de l'égalité

$$\xi_F = G \quad \text{où} \quad G = G'(x,y,z_{\alpha_0\beta_0},\dots,z_{\alpha_n\beta_n},z_1,z_2), \tag{1}$$

G est holomorphe en 0.

L'équation (1) admet, en vertu du principe d'Artin (qui est dans ce cas directement applicable) des solutions holomorphes $\Psi_1,\Psi_2,\Psi_i(0)=0$, $i=1,2$, i.e. $\xi_F(x,y,z_{\alpha_0\beta_0},\dots,z_{\alpha_n\beta_n},z_1,z_2,\Psi_1,\Psi_2) = G$.

Les fonctions Ψ_i dépendent a priori des variables $x,y,z_{\alpha_0\beta_0},\dots,z_{\alpha_n\beta_n},z_{\alpha_0\varepsilon_0},\dots,z_{\alpha_n\varepsilon_n}$. En réalité, on peut les choisir de telle sorte qu'elles ne dépendent que de x et y; ceci résulte du lemme suivant, variante sans doute bien connue du théorème d'Artin:

Lemme III.5.1. *Soit $F\colon \mathbb{C}^p_{,0}\times\mathbb{C}^q_{,0}\times\mathbb{C}^1_{,0}\mapsto\mathbb{C}^s_{,0}$ un germe d'application holomorphe. Supposons que l'équation implicite $F(x,\mu,y)=0$ admette une solution formelle $\hat{y}$ ne dépendant que de x. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, elle admet une solution analytique y_k ne dépendant que de x et telle que $J_k y_k = J_k\hat{y}$.*

Preuve du Lemma III.5.1. En notation multi-indice, $F(x,\mu,\hat{y})=0$ s'écrit

$$\sum_J F_{J_i}(x,\hat{y})\mu^J = 0,$$

$i=1,\dots,s, F_{J_i}$ holomorphes en 0. En d'autres termes, $F_{J_i}(x,\hat{y})=0$ pour tout J_i. Soit $\mathcal{S}=(F_{J_i})$ l'idéal sur $\mathcal{O}_{p+r}$ engendré par les (F_{J_i}). $\mathcal{S}$ est de type fini, donc résoudre $F(x,\mu,\hat{y})=0$ revient à résoudre un nombre fini d'équations $F_p(x,\hat{y})=0$, F_p holomorphe. Le théorème d'Artin permet alors de conclure à l'existence d'une solution analytique répondant à la question.

Nous avons donc obtenu l'égalité $F\circ\Phi = G$ ou

$$\Phi = (x(1+\Psi_1(x,y),y(1+\Psi_1(x,y)), \qquad \Psi_i\in\mathcal{O}_2, i=1,2,$$

qui induit, en composant par π, l'égalité $f\circ\Phi = g$.

Ceci achève la preuve du théorème A dans le cas où $\omega_N = xdy+\lambda y\,dx, \lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$.

$2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ cas: $\omega_N = \omega_{k,\mu}$ et $\omega_N = \omega_{p,\mu}$. Reprenons les mêmes notations que pour le cas précédent:

Manifestement, on peut choisir $G = P(X_1, X_2)$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{A}_1$. Ceci entraîne que $(\widehat{\Phi}^*)^{-1}G = Q(X_1, X_2)$ où Q est un polynôme à coefficient a_{ij} dans $\widehat{\mathcal{A}}_1$. De même que dans le premier cas, on doit avoir $\pi(a_{ij}) \in \mathcal{N}_X$ et plus précisément, $\pi(a_{ij}) \in \mathcal{A}_X$. Ceci n'est manifestement possible que si $a_{ij} \in \mathcal{A}_1$, pour tout i, j.

On hérite ainsi d'une égalité du type

$$x^{m_0} y^{n_0} \xi_F(x, y, X_{\alpha_0\beta_0}, \dots, X_{\alpha_n\beta_n}, \widehat{\Psi}_1, \widehat{\Psi}_2) = x^{m_0} y^{n_0} G, \qquad m_0, n_0 \in \mathbb{N},$$

où $\xi_F = F \circ \widehat{\Phi}$ ne dépend pas du choix de $\widehat{\Psi}_1$ et $\widehat{\Psi}_2$ et tel que $x^{m_0} y^{n_0} \xi_F$, $x^{m_0} y^{n_0} y^{n_0} G$ sont holomorphes. On applique alors Artin pour conclure de la même façon que précédemment.

Le Théorème III.1 est ainsi démontré en tout généralité.

Le Lemme II.4.2 s'en déduit facilement connaissant la forme générale des intégrales premières Nilsson des formes normales (Lemmes III.4.2 à III.4.4).

IV. Le cas d'un éclatement: $n(\mathcal{F}_\omega) = 1$

L'application $\pi\colon \widetilde{M} \mapsto \mathbb{C}^2$ de réduction du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est réduite à un seul éclatement et le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est une droite projective $\mathbb{CP}(1)$ portant les singularités $\delta = \{\delta_1, \dots, \delta_p\}$ du feuilletage éclaté $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. Ce feuilletage admet l'intégrale première $F = f \circ \pi$ qui est dans la classe de Nilsson d'après le Lemme II.1.

Au voisinage de chaque singularité δ_i, il existe un système de coordonnées (x_i, y_i) tel que les séparatrices de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ soient données par $x_i y_i = 0$ (cf. III). Tout branche de F admet alors en δ_i un développement asymptotique qu'on sait être de la forme $\sum_j a_{ij}(x_i, y_i)(\operatorname{Log} x)^{m_i}(\operatorname{Log} y)^{n_i} y^{\lambda_i} y^{\mu_i}$ (Lemme II.2).

L'outil permettant ici de recoller ces informations locales sera le groupe d'holonomie projective. Rappelons de quoi il s'agit: Soit $m_0 \in \mathbb{PC}(1)$ un point régulier du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. Donnons nous en m_0 un facteur transverse au feuilletage, i.e. un morphisme

$$\begin{aligned} \tau\colon U &\mapsto \widetilde{M} \\ z &\mapsto \tau(z) \end{aligned}$$

de variétés analytiques tel que:

i) $U \ni 0$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

ii) τ est injectif.

iii) $\tau^*_{\omega_{m_0}}$ ne s'annule pas sur U où ω_{m_0} désigne un générateur de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ en m_0.

iv) $\tau(0) = m_0$.

Soit $\gamma\colon [0,1] \mapsto \mathbb{CP}(1)\backslash S$ un lacet en m_0. Ce lacet se relève en un point m de $\tau(u \to U)$ sur la feuille α_m passant par m suivant la fibration de Hopf; on hérite ainsi sur $\tau(u \to U)$ d'une application de retour $m \mapsto h_\gamma(m)$ (voir Figure 1).

On dispose alors d'une représentation:

$$\begin{aligned} \rho\colon \pi_1(\mathbb{CP}(1) \times S, m_0) &\mapsto \operatorname{Diff}(\mathbb{C}, 0) \\ \gamma &\mapsto h_\gamma. \end{aligned}$$

Nous appellerons groupe d'holonomie projective relativement à la transversale τ et nous noterons $\mathcal{H}ol_\tau$, l'image de ρ.

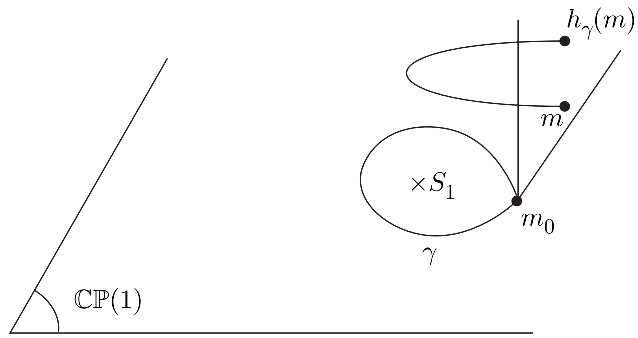

FIGURE 1.

IV.1. **Description de la monodromie en termes d'holonomie.** Donnons nous $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et sur U un ouvert sectoriel

$$U_{\varepsilon,\theta} = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < \varepsilon, |\operatorname{Arg} z - \theta| < \varepsilon\},$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Nous noterons $V(F)_{\varepsilon,\theta}$ l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par les différentes déterminations de $F \circ \tau$ en restriction à $U_{\varepsilon,\theta}$. Soit $V(F)_\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} V(F)_{\varepsilon,\theta}$ c'est-à-dire l'espace vectoriel des "germes de déterminations de F" dans la direction θ. La collection des $V(F)_\theta$ définit un faisceau $V(F)_{S^1}$ d'espaces vectoriels sur S^1 dont les éléments sont caractérisés par un développement asymptotique de la forme $\sum_j a_i(z) z^{\alpha_i} (\operatorname{Log} z)^{n_i}$, $a_i \in \mathcal{O}_1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $n_i \in \mathbb{N}$ (Lemme II.2).

En m_0, considérons maintenant un germe d'intégrale première holomorphe φ de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ telle que $\varphi \circ \tau(z) = z$. Le prolongement analytique $\gamma \cdot \varphi$ de φ le long d'un lacet γ de $\mathbb{CP}(1) \backslash S$ vérifie manifestement $\gamma \cdot \varphi(\tau(z)) = \varphi \circ \tau(h^{-1}_{\gamma(z)})$ où $h_\gamma = \rho(\gamma)$ désigne le difféomorphisme d'holonomie associé au lacet γ.

Pour tout $h \in \mathcal{H}ol_\tau$, on dispose ainsi d'un automorphisme (cf. [To])

$$\begin{aligned} \Phi_{h,\delta} \colon V(F)_0 &\mapsto V(F)_0 \\ \xi &\mapsto (\delta \cdot \xi) \circ h \end{aligned}$$

où $\delta \cdot \xi$ désigne le prolongement analytique de ξ suivant un chemin δ dans S^1 joignant 0 à $\theta = \operatorname{Im}(\operatorname{Log}(h'(0)))$. En particulier, on dispose en posant $\delta = 0$ d'une action du sous groupe de $\mathcal{H}ol_\tau$ formé des éléments tangents à l'identité sur l'espace vectoriel $V(F)_0$.

Lemme IV.2. *Le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ est résoluble.*

La preuve de ce lemme procède par l'absurde; c'est pourquoi nous présentons maintenant une caractérisation des groupes de difféomorphismes non résolubles.

Lemme IV.3. *Soit H un sous groupe non résoluble du groupe* $\operatorname{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ *des germes de difféomorphismes holomorphes à une variable fixant l'origine.*

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons $D^{(i)}(H)$ le $i^{\text{ème}}$ groupe dérivé de H.

Sous ces hypothèses, il existe une suite $(h_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de H telle que, pour tout i :

a) *$h_i \in D^{(i)}(H)$.*

b) *$h_i \neq \mathrm{Id}$.*

c) *h_i est tangent à l'identité à un ordre supérieur à i, i.e.: $h_i(z) = z + \sum_{n>i} a_n z^n$.*

Preuve du Lemme IV.3. Pour tout $i \geq 1$, il suffit de montrer que $D^{(i)}(H)$ ne contient que des éléments dont l'ordre de tangence à l'identité est supérieur à i. Procédons pa récurrence sur i:

—C'est évidemment vrai pour $i = 1$.

—Pour $i > 1$, on a $D^{(i)}(H) = [D^{(i-1)}(H), D^{(i-1)}(H)]$. En particulier, il existe $h, g \in D^{(i-1)}(H)$ tels que $[h, g] \neq \mathrm{Id}$, $h = \mathrm{Id} + \sum_p$, $g = \mathrm{Id} + \sum_q$ où $\sum_p, \sum_q \in \mathcal{O}_1$ et sont d'ordre respectif p et q, $i \leq p \leq q$.

De même, $h^{-1} = \mathrm{Id} + \widetilde{\sum}_p$, $g^{-1} = \mathrm{Id} + \widetilde{\sum}_q$ où $\widetilde{\sum}_p$ et $\widetilde{\sum}_q$ sont encore d'ordre respectif p et q. Par suite, $[h, g] = \mathrm{Id} + (\sum_q + \widetilde{\sum}_q) + (\sum_p + \widetilde{\sum}_p) \operatorname{mod}(z^{p+1})$ car $\sum_p + \widetilde{\sum}_p$ est d'ordre supérieur à p et $\sum_q + \widetilde{\sum}_q$ est d'ordre supérieur à q.

IV.4. **Preuve de Lemme IV.2.** Par prolongement analytique, on dispose d'une action de $\pi_1(S^1, 0) \simeq \mathbb{Z}$ sur $V(F)_0$. Notons M_1 l'automorphisme de $V(F)_0$ associé au lacet d'indice 1. En jordisant M_1 et quitte à reparamétrer le facteur transverse τ, il est aisé de montrer qu'il existe un sous espace vectoriel invariant par M_1 sous l'une des trois formes suivantes (cf. [To])

α) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{z^\gamma}\}$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$,

β) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{\mathrm{Log}} z, 1\}$,

γ) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\lambda \underline{\mathrm{Log}} z + \frac{1}{z^n}, 1\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(Le signe—désigne la détermination principale attachée aux fonctions multiformes z^γ et $\log z$).

Supposons $\mathcal{H}ol_\tau$ non résoluble et donnons nous une suit $(h_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{H}ol_\tau$ ayant les propriétés de l'énoncé du Lemme IV.3.

Dans les cas α) et β), il existe des germes de $V(F)_0$ ayant les écritures respectives $\xi = z^\gamma$ et $\xi = \underline{\mathrm{Log}}\, z$.

Dans le cas α) (resp. β)), $\xi \circ h_i(z) = z^\gamma(1 + g_i(z))$ (resp. $\underline{\mathrm{Log}}\, z + k_i(z)$) où les g_i et k_i sont des germes de fonctions holomorphes non nulles d'ordre supérieur à i.

Dans ces deux situations, l'espace vectoriel engendré par la suite $(\xi \circ h_i)$ est donc de dimension infinie. Ceci est impossible compte tenu du fait qu'il s'agit d'un sous espace de $V(F)_0$ (IV.1) qui est par hypothèse de dimension finie.

Dans le cas γ), on est en présence d'un élément de $V(F)_0$ de la forme $\xi = \lambda \underline{\mathrm{Log}}\, z + 1/z^n$. Il y a deux configurations possibles:

a) Il existe $h \in D(\mathcal{H}ol_\tau)$ tel que $\xi \circ h = \xi + g$ où $g \in \mathcal{M}_1 \backslash \mathbb{C}$. Puisque $g \in V(F)_0$ (IV.1), on se ramène au cas α) via un bon choix de la transversale τ.

b) Pour tout $h \in D(\mathcal{H}ol_\tau)$, $\xi \circ h = \xi + C_h$ où $C_h \in \mathbb{C}$. Visiblement, ceci entraîne que $\xi \circ h = \xi$ dès que h est un élément du deuxième groupe dérive $D^{(2)}(\mathcal{H}ol_\tau)$. Il est alors aisé (cf. [To]) de se ramener au théorème des fonctions implicites classiques et conclure que pour tout $h \in D^{(2)}(\mathcal{H}ol_\tau)$, $h = \mathrm{Id}$.

Ainsi, le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ est résoluble.

IV.5. **Sous espaces de déterminations invariants par l'holonomie.** Nous nous proposons dns ce paragraphe de décrire la forme des espaces invariants "minimaux" de déterminations invariants par l'holonomie.

Notons η la représentation $D(\mathcal{H}ol_\tau) \mapsto \mathrm{Aut}\, V(F)_0$ induite par la composition avec les difféomorphismes (cf. IV.1). Compte tenu du fait que $\mathcal{H}ol_\tau$ est résoluble et donc métabélien ([Ce, Mo]), l'image de η, que l'on notera G_0, est un groupe abélien.

On constate de plus que l'opérateur M_1 définit en IV.4 commute avec G_0. Ainsi le groupe G engendré par G_0 et M_1 est-il abélien et donc triangularisable selon un résultat classique d'algèbre linéaire.

En utilisant le mêmes procédés qu'au Chapitre IV.4, on montre alors qu'il existe, dans un bon choix du paramètre z, un sous espace E de $V(F)_0$ invariant par G de l'une des quatre formes suivantes (voir aussi [To]):

a) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{z^\gamma}\}$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$.

b) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{\mathrm{Log} z}, 1\}$.

c) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{z^\gamma}, 1\}$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$, $-\gamma \notin \mathbb{N}^*$.

d) $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{\lambda \mathrm{Log} z + \frac{1}{z^n}}, 1\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On constate alors que l'invariance de E par $D(\mathcal{H}ol_\tau)$ entraîne que le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ est abélien dans le cas a), b) et c).

Les lemmes qui suivent explicitement la nature de la factorisation donnée par le théorème principal II.4.

Lemme IV.6. *Supposons le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ résoluble non abélien, alors f s'écrit sous la forme γ) du Théorème II.4.*

Preuve du Lemme IV.6. D'après la remarque finale du paragraphe IV.5, on hérite dans cette situation d'un espace invariant de $V(F)_{,0}$ par $D(\mathcal{H}ol_\tau)$ sous la forme $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\underline{\lambda \mathrm{Log} z + 1/z^n}, 1\}$. Notons $\underline{F} \in V(F)_0$ le germe vectorie $\underline{\lambda \mathrm{Log} z + 1/z^n}$. Le champ dual de $d\underline{F}$, $X = z^{n+1}/(z^n - n)(\partial/\partial z)$ est un élément de χ_1 qui, compte tenu des propriétés d'invariance de E, vérifie $h_* X = X$, pour tout $h \in D(\mathcal{H}ol_\tau)$.

Soit $\beta = \{F, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p\}$ une base de $V(F)_{,0}$. Les éléments de β sont solutions de l'équation différentielle

$$X^{(p+1)} b + \sum_{i=1}^{p+1} a_{p+1-i} X^{(p+1-i)} b = 0$$

($X^{(i)}$ désigne le i$^{\text{ème}}$ itére de X vu comme dérivation) où, pour tout i: $a_i = N_i/D_i$ avec

$$N_i = (-1)^i \begin{vmatrix} \underline{F} & \underline{b}_p \\ . & . \\ . & . \\ X^{(i-1)}\underline{F} & X^{(i-1)}\underline{b}_p \\ X^{(i+1)}\underline{F} & X^{(i+1)}\underline{b}_p \\ . & . \\ . & . \\ X^{(p+1)}\underline{F} & X^{(p+1)}\underline{b}_p \end{vmatrix}$$

et

$$D_i = \begin{vmatrix} \underline{F} & \underline{b}_p \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ X^{(p)}\underline{F} & X^{(P)} b_p \end{vmatrix}.$$

Ceci résulte, on le rappelle, de l'égalité

$$\frac{W(b, F, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p)}{W(F, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p)} = 0$$

où W désigne le Wronskien attaché à la dérivation X (voir par exemple [Ka]).

Selon un résultat classique, on sait que les a_i sont des germes de fonctions méromorphes.

Affirmation. Les a_i sont en réalité constants. En effet, soit $h \in D(\mathcal{H}ol_\tau)$, $h \neq \mathrm{Id}$, d'après IV.1, $B_h = \{\underline{F} \circ h, b_1 \circ h, \ldots, b_p \circ h\}$ est une base de $V(F)_0$.

Notons $\det_h$ le déterminant de la matrice de passage de B à B_h; visiblement,

$$a_i \circ h = \frac{N_i \circ h}{D_i \circ h} = \frac{\mathrm{Det}_h N_i}{\mathrm{Det}_h D_i} = a_i.$$

Les orbites de h adhérant à l'origine (cf. [Ca]), cette dernière égalité n'a lieu que si $a_i \in \mathbb{C}$. On est ainsi ramené à résoudre une équation différentielle à coefficients constants dont on sait les solutions être de la forme $\underline{b}_i = \sum_j P_{ij}(F) e^{\lambda_{ij}} \underline{F}$ où les P_{ij} sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Les $\underline{b}_i$ étant des restrictions sectorielles de fonctions à croissance modérée, on peut de plus choisir les λ_{ij} nuls. Ainsi, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\underline{b}_i = P_i(\underline{F})$ où $P_i \in \mathbb{C}[X]$. Par suite, il existe en un point m du domaine de définition de F un germe $\widetilde{F}_\omega$ de l'espace des déterminations $V(F)_m$ dont l'image pour tout opérateur M de monodromie est de la forme $P_M(\widetilde{F}_\omega)$ où P_M est un polynôme. La finitude de l'espace des déterminations impose alors que P_M soit une transformation affine. En conséquence, $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ admet une intégrale première Nilsson $\widetilde{F}$ telle que

i) $\widetilde{F}$ admet un espace de déterminations de dimension deux,

ii) Chaque détermination de $\widetilde{F}$ est combinaison linéaire de déterminations de F,

iii) $d\widetilde{F}$ est une 1-forme dont l'espace des déterminations est de dimension 1 (monodromie multiplicative).

Soit $\tilde{f} = \widetilde{F} \circ \pi^{-1}$; par construction, $\tilde{f}$ est une intégrale première Nilsson de $\mathcal{F}_\omega$ dont la différentielle $d\tilde{f}$ est à coefficients Nilsson et à monodromie multiplicative. Il est alors clair que $\omega = g d\tilde{f}$, où g est un facteur intégrant Nilsson tel que $\dim_{\mathbb{C}} V(g) = 1$. On en déduit que la forme $\eta = \frac{dg}{g}$ est méromorphe et devient ainsi un facteur intégrant généralisé à pôles simples de ω. $\tilde{f} = \int \frac{\omega}{e^{\int \eta}}$ est donc une intégrale première Nilsson dans la classe de Liouville et par construction, $f = P(\tilde{f})$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

On est conduit à des résultats comparables lorsque $\mathcal{H}ol_\tau$ est abélien. Néanmoins, il faut procéder à des restrictions que nous explictions ci-dessous:

IV.7. **Définitions.** *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage non dicritique qu'on peut réduire après un seul éclatement π et soit $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega = \pi^* \mathcal{F}_\omega$ le feuilletage éclaté. Nous dirons qu'une singularité S de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est de type selle noeud mal orienté (s.n.m.o.). Si*

i) *le germe de feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega_s}$ induit par $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est du type selle noeud,*

ii) *la variété invariante forte de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega_s}$ (selon la terminologie de* [Ma, Ra$_1$]) *est transverse au diviseur $\pi^{-1}(0)$.*

(*Dans cette situation, on sait, depuis les travaux de* [Ma, Ra$_1$], *que l'holonomie projective ne porte pas d'information particulière sur la classe analytique du germe $\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega_s}$.*)

Les Lemmes IV.8, IV.9, IV.10 qui suivent s'énoncent sous des conditions de non existence d'un s.n.m.o.

Lemme IV.8. *Supposons le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ abélien et non linéarisalbe; alors f s'écrit sous la forme γ) du Théorème II.4.*

Preuve de Lemme IV.8. Le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ est engendré par les difféomorphismes d'holonomie, $h_1, \ldots, h_p$, attaché à chaque singularité de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. Parmi ces gérérateurs, il en existe un non linéarisable; en effet, le centralisateur d'une homothétie $h(z) = e^{2i\pi\lambda}z$, est le sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ des homothéties lorsque λ n'est pas rationnel; d'autre part, tout sous groupe abélien de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ engendré par un nombre fini d'éléments périodiques est lui même périodique (cf. [Ma, Mo]). Compte tenu de la correspondance feuilletage réduit holonomie (voir par exemple [Lo]), $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ comporte une singularité résonnante ou de type selle noeud.

La suite de la preuve s'appuie sur le lemme clef suivant dont on peut trouver la démonstration dans [Ca, Ce] et [To].

Lemme. *Sous les conditions du Lemme IV.8 et si l'on suppose de plus que chaque singularité de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est normalisable, $\mathcal{F}_\omega$ admet un facteur intégrant holomorphe g: $d(\frac{\omega}{g}) = 0$ qui produit donc l'intégrale première Nilsson $\tilde{f} = \int \frac{\omega}{g} = \sum_n^{i=1} \lambda_i \operatorname{Log} f_i$ $+ H$, f_i holomorphes et H méromorphe.*

Fin de la preuve du Lemme IV.8. Posons $F = f \circ \pi$ et $\widetilde{F} = \tilde{f} \circ \pi$. Soit S une singularité résonnante ou dégénérée du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$; $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est donc défini en S pour une forme du type $\omega_s = \omega_{k,\mu}$ où $\omega_s = \omega_{p,\mu}$.

Rappelons que les séparatrices de $\mathcal{F}_{\omega_s}$ forment une hypersurface analytique X à croisement normal sur un voisinage V de S. L'espace des déterminations de $\widetilde{F}|_{V\setminus X}$ est de dimension au plus deux; compte tenu de l'étude menée en III.2, $\widetilde{F}_{V\setminus X}$ est donc égale à l'intégrale premère $f_{k,\mu}$ (ou $f_{p,\mu}$) associée à $\mathcal{F}_{\omega_s}$ modulo transformation affine inversible. Il en résulte que $F|_{V\setminus X} = P(\widetilde{F}|_V)$ où P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, $f = P(\tilde{f}) = P(\int \frac{\omega}{g})$, ce qui achève la preuve du Lemme IV.8.

Lemme IV.9. *Supposons le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ linéarisable et non périodique*; *alors f s'écrit sous la forme β) du Théorème II.4.*

Preuve du Lemme IV.9. Dans ces conditions, il existe une singularité P de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ autour de laquelle, toujours compte tenu de la correspondance holonomie-forme réduite, le feuilletage est défini par la forme $\omega_p = xdy + \lambda y\, dx, \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$, dans un bon choix de coordonnées analytiques x, y. La suite de la preuve découle encore d'un résultat de même nature que le lemme invoqué dans le cas précédent.

Lemme ([Ce, Ma])**.** *Sous les conditions du Lemme IV.9, $\mathcal{F}_\omega$ admet une intégrale première élémentaire, i.e.: une fonction multiforme $g = \prod_{i \text{ finie}} f_i^{\lambda_i}$, $f_i \in \mathcal{O}_2$ réduites, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\omega \wedge dg = 0$. En outre, dans le cas où $\mathcal{F}_\omega$ n'admet pas d'intégrales premières holomorphes, toute autre intégrale première élémentaire s'écrit sous la forme $\tilde{g} = c \cdot g^\mu$, c, $\mu \in \mathbb{C}^*$.*

Fin de la preuve du Lemme IV.9. En vertu du lemme précédent, $g \circ \pi$ s'écrit au voisinage de P sous la forme $c(x^\lambda y)^\mu$, c, $\mu \in \mathbb{C}^*$. Le Lemme IV.9 est alors une conséquence immédiate de la factorisation donnée par le Lemme III.2.1.

Lemme IV.10. *Supposons le groupe $\mathcal{H}ol_\tau$ périodique*; *alors f s'ècrit sous la forme α) du Théorème II.4.*

Preuve de Lemme IV.10. On peut supposer, par un bon choix de τ, que $\mathcal{H}ol_\tau = \langle h_\nu \rangle$ où $h_\nu(z) = e^{2i\pi/\nu}z$ ([Ma, Mo]). On sait qu'il existe alors une intégrale première holomorphe g de $\mathcal{F}_\omega$ telle que $(g \circ \pi) \circ \tau = z^\nu$ et que toute autre intégrale première s'annulant en 0 qui n'est pas une puissance s'écrit alors sous la forme $\ell(g)$, $\ell \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ ([Ma, Mo]).

Soit $(\underline{b}_i)_{i=1\cdots p}$ une base de l'espace des germes de déterminations $V(F)_0$.

Rappelons que l'on dispose d'un automorphisme $\Phi_{h_\nu,\delta}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V(F)_0$ (cf. IV.1).

La suite de démonstration est alors à peu près calquée sur celle du Lemme IV.6: Les $\underline{b}_i$ sont solutions d'une équation différentielle linéaire:

$$(E) \qquad X^{(p)}b + \sum_{i=1}^{p} a_{p-i} X^{(p-i)} b = 0$$

où $X = \xi^* = z\frac{\partial}{\partial z}$, ξ désigne le revêtement ramifié en 0 $z \mapsto z^\nu$.

On remarque que X est invariant par l'holonomie; ceci, de même que dans la preuve du Lemme IV.6, nous conduit à dire que les coefficients a_i sont des fonctions méromorphes invariantes sous l'action de h_ν, d'où l'on déduit que $a_i(z) = \tilde{a}_i(z^\nu)$, $\tilde{a}_i \in \mathcal{M}_1$. Ainsi, (E) se redescend par ξ en une équation différentielle linéaire à points singuliers réguliers en 0 (Lemme II.1). Compte tenu de l'écriture de ses solutions (Lemme II.2), on en déduit que pour tout i,

$$\underline{b}_i = \sum_{j \text{ finie}} a_{ij}(z^\nu)(z^\nu)^{\lambda_{ij}}(\mathrm{Log}\, z^\nu)^{n_{ij}}, \qquad a_{ij} \in \mathcal{O}_1, \lambda_{ij} \in \mathbb{C}, n_{ij} \in \mathbb{N}$$

Ceci achève la démonstration du Lemme IV.9. Il reste à traiter le cas selle noeud mal orienté. C'est l'objet du

Lemme IV.11. *Supposons que $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ comporte une singularité S de type* S.n.m.o; *alors f s'écrit sous la forme γ) du Théorème II.4.*

Preuve de Lemme IV.11. D'après III.2.4, $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ admet au voisinage de S une intégrale première Nilsson F_0 dans laquelle toutes les autres se factorisent polynomialement. Rappelons qu'en S, les séparatrices de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ forment un système à croisement normal X dont le groupe de Poincaré du complément est alors abélien; en conséquence, toute restriction locale de f sur un petit voisinage V connexe de S (plus exactement sur $V\backslash X$) admet un groupe de monodromie abélien et par suite triangularisable. Il existe donc en restriction à V une intégrale première Nilsson $\widetilde{F}$ dont les déterminations sont combinaisons linéaires de déterminations de F_0 et telle que $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}} V(\widetilde{F}) \leq 2$.

Par ailleurs, $\widetilde{F} = P(F_0)$, $P \in \mathbb{C}[X]$, et ceci n'est manifestement possible que si P est une transformation affine. On conclut alors de la même facçon qu'à la démonstration du Lemme IV.6.

Remarquons qu'en invoquant cette fois-ci le Lemme III.2.3, on pourrait de même redémontrer le Lemme IV.8.

V. Le cas général: La réduction comporte un nombre quelconque d'éclatements

Il ne présente pas de profondes modifications par rapport à la situation précédente dans lequel le feuilletage est réduit à l'issue d'un seul éclatement. Il faut néanmoins dans certaines situations substituer aux groupes d'holonomie projective d'autres groupes portant plus d'informations sur la nature du feuilletage: les groupes d'invariance introduits par Cerveau, Mattéi et Moussu.

V.1. **Quelques rappels sur les groupes d'invariance.** Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe non dicritique à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Suivant la terminologie de [Ce, Ma], on rappelle que $\mathcal{F}_\omega$ admet une intégrale première élémentaire s'il admet une intégrale première multiforme du type $f_\lambda^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in \mathcal{O}_2$ irréductibles. Dans cette situation, on établit que les groupes d'holonomie projective apparaissant après réduction de $\mathcal{F}_\omega$ sont linéarisables. C'est dans la démarche inverse que la notion de groupe d'invariance va jouer un rôle essentiel.

Supposons qu'à l'issue d'un éclatement π, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ image réciproque de $\mathcal{F}_\omega$ par π admette en chaque singularité S_j, $j = 1, \dots, p$, du diviseur $\pi^{-1}(0)$ une intégrale première élémentaire g_j définie localement sur le complément d'hypersurfaces X_j. Les g_j s'étendent naturellement en des intégrales premières multiformes sur des ouverts $V_j^* = V_j \backslash X$, $X = \bigcup_j X_j$, où les V_j désignent des ouverts dont les traces sur $\pi^{-1}(0)$ forment un recouvrement simplement connexe du diviseur. En outre, on peut exiger que les V_j^* aient en commun un point régulier m_0 de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ et quitte à élever les g_j à une puissance complexe adéquate, nous pouvons supposer que chacune de leur restriction sur une transversale $\tau(z)$ en m_0 est une fontion uniforme régulière de z. Pour tout j, ces restrictions définissent donc un ensemble de germes holomorphes, noté $D(g_j, \tau)$. Le groupe d'invariance de g_j (relativement à τ) est par définition le sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ formé des germes de difféomorphismes holomorphes qui laissent $D(g_j, \tau)$ invariant: $H_\tau(g_j) = \{h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)/\text{pour tout } g \in D(g_j, \tau), g \circ h \in D(g_j, \tau)\}$. Enfin, nous noterons $H_\tau(g_1, \dots, g_p)$ le sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ engendré par les $H(g_j, \tau)$. Par construction, on remarquera que la groupe d'invariance contient le groupe d'holonomie projective usuel et qu'ils coïncident lorsque les singularités S_j sont réduites.

Sous ces hypothèses, Cerveau et Mattéi établissent le

Théorème V.1.

1) *$\mathcal{F}_\omega$ admet une intégrale première holomorphe si et seulement si $H_\tau(g_1, \dots, g_p)$ est périodique.*

2) *$\mathcal{F}_\omega$ admet une intégrale première élémentaire si et seulement si le groupe $H_\tau(g_1, \dots, g_p)$ est linéarisable.*

V.2. **Preuve du théorème principal.** Nous nous replaçons dans les hypothèses et notations du Théorème II.4. L'application π de réduction du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est ici composeé d'un nombre fini d'éclatements ponctuels: $\pi = E_n \circ \cdots \circ E_1$. Notons $D_1, \dots, D_n$, les composantes du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ numérotées par ordre d'apparition et de groupes d'holonomie $H_1, \dots, H_n$.

Supposons d'abord qu'il existe une composante d de $\pi^{-1}(0)$ admettant l'une des deux configurations suivantes:

—D porte une singularité de type Snmo du feuilletage réduit $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$.

—le groupe d'holonomie projective de D n'est pas linéarisable.

On hérite alors du

Lemme V.2.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, f est donnée par la forme γ) du Théorème II.4.*

Preuve. Il suffit de calquer la démonstration des Lemmes IV.9 et IV.11, celles-ci restant inchangées si l'on raisonne sur des composantes du diviseur de classe de Chern inférieure à -1.

Si les hypothèses précédentes ne sont pas satisfaites, ceci signifie que chaque groupe d'holonomie H_i est linéarisable. En particulier, ceci implique en vertu de la correspondance feuilletages réduits—holonomie (cf. [Ma, Mo]) l'existence d'intégrales premières élémentaires de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ au voisinage de chacune de ses singularités.

D'après le Théorème V.1, l'image réciproque par $E_{n-1} \circ \cdots \circ E_1$ de $\mathcal{F}_\omega$ admet au voisinage de $E_n(D_n)$ une intégrale première élémentaire.

On a ainsi défini un groupe d'invariance sur les projectifs de $(E_{n-1} \circ \cdots \circ E_1)^{-1}(0)$ contenant $E_n(D_n)$.

Deux cas sont alors envisageables sur le nouvel ordre obtenu:

—Il existe un groupe d'invariance non linéarisable.

—Tous les groupes d'invariance sont linéarisables, auquel cas on recommence l'opération précédente en considérant l'intégrale première élémentaire induite au voisinage de $E_n \circ E_{n-1}(D_{n-1})$.

Par induction, il est facile de constater que l'on aboutit à l'une des deux configurations suivantes:

1°) le premier diviseur $E_1^{-1}(0)$ admet un groupe d'invariance H_τ qui est linéarisable.

2°) Il existe une composante de $(E_p \circ \cdots \circ E_1)^{-1}(0)$, $p < n$, qui admet un groupe d'invariance H_τ non linéarisable.

Soit F l'intégrale première Nilsson $f \circ E_1$ dans le premier cas et $f \circ E_p \circ \cdots \circ E_1$ dans le deuxième cas.

On peut constater par construction (cf. [To] pour les détails) que l'action du groupe d'invariance sur $V(F)_\tau$ (notations du chapitre IV) est la même que celle de l'holonomie décrite en IV.1.

On en déduit alors les lemmas qui suivent:

Lemme V.2.2. *Dans le premier cas, f s'écrit sous la forme α) du Théorème II.4 lorsque H_τ est périodique et sous la forme β) lorsque H_τ est linéarisable non périodique.*

Preuve. D'après le Théorème V.1, F_ω admet une intégrale première élémentaire. Dans le cas où H_τ est périodique, on recopie la démonstration du Lemme IV.10.

Dans le cas où H_τ est linéarisable non périodique, ceci implique qu'il existe une singularité réduite à valeur propre non rationnelle et il suffit alors de calquer la preuve du Lemma IV.9.

Lemme V.2.3. *Dans le cas 2°), f s'écrit sous la forme γ) du Théorème II.4.*

Preuve. Puisque H_τ agit par composition sur $V(F)_\tau$, il est résoluble en vertu de la démonstration du Lemme IV.3.

Par ailleurs, H_τ n'est pas abélien, sinon il serait linéarisable car engendré par des éléments linéarisables commutant entre eux.

On est ainsi conduit à une situation identique à celle de l'énoncé du Lemme IV.6 et on conclut de la même façon.

V.3. **Un contre exemple au théorème principal dans le cas dictrique.** Ce contre exemple repose sur un argument de monodromie. Éclatons l'origine de $\mathbb{C}^2$. En vertu de la correspondance de Riemann Hilbert, il existe sur le diviseur exceptionnel (qui est ici une droite projective complexe) une équation différentielle E à points singuliers réguliers qui admet une solution dans la classe de Nilsson dont la monodromie est un sous groupe libre non monogène du groupe linéaire $GL(2,\mathbb{C})$. Cette solution s'étend naturellement sur la fibration de Hopf en dehors des fibres rencontrant les points singuliers de E. En redescendant, on hérite donc d'une intégrale première Nilsson f du champ radial $x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$ ou, par dualité, de la forme dicritique $\omega = xdy - ydx$. Par construction, le groupe de monodromie de f est libre. Or la monodromie d'une fonction Liouvillienne est résoluble ou contient un groupe résoluble d'indice fini ([Ni, Pa], [To]); il s'ensuit que f ne peut être Liouvillienne.

Bibliographie

[Ar] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math. **5** (1968), 277–291. MR **38:**344

[Bj] J. E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland, 1979, pp. 248–276. MR **82g:**32013

[Br, Bo] C. Briot et J.-C. Bouquet, *Recherches sur les fonctions définies par des équations définies par des équations différentielles* (J. Ecole Polytechnique, Vol. XXI, 1856, pp. 134–198).

[Ca] C. Camacho, *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in* $\mathbb{C}^2$, Astérisque **59–60** (1978), pp. 83–94. MR **81d:**58016

[Ca, Ce] F. Cano, D. Cerveau, *Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*, Acta Math. **169** (1992), 1–103. MR **93k:**32069

[Ca, Sca] C. Camacho, B. Scardua, *Liouvillian first integrals, solvable holonomy groups and Riccati foliations*, Prépublication.

[Ce, Ma] D. Cerveau, J.-F. Mattéi, *Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque*, Vol. **97** (1982). MR **86f:**58006

[Ce, Mo] D. Cerveau, R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de* $\mathbb{C},0$ *et équations différentielles* $ydy+\cdots=0$, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 459–488. MR **90m:**58192

[Ka] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957. MR **20:**177

[Lo] F. Loray, *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble*, Thèse de l'Université de Rennes I (1994).

[Ma, Mo] J.-F. Mattéi et R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Ecole Norm. Sup. **13** (1980), 469–523. MR **83b:**58005

[Ma, Ra_1] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéares du premier ordre*, I.H.E.S. Publ. Math. **55** (1982), 63–164. MR **84k:**34011

[Ma, Ra_2] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **16** (1983), pp. 271–621. MR **86k:**34034

[Ni, Pa] E. Paul et M. Nicolau, *A geometric proof of differential Galois theory*, Preprint.

[Nils] N. Nilsson, *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds*, Ark. Mat. **5** (1965), 463–475. MR **31:**180

[Pe, Yo] R. Pérez Marco, J.-C. Yoccoz, *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite*, Astérisque **222** (1992), 345–371. MR **96b:**58090

[Ro] M. Rosenlicht, *On Liouville's theory of elementary functions*, Pacific J. Math. **65** (1976), pp. 485–492. MR **56:**5514

[Sca] B. Scardua, *Transversely affine and transversely projective foliations on complex projective spaces*, Thesis, IMPA, 1994.

[Sg] M.-F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688. MR **92m:**12014

[To] F. Touzet, *Equations différentielles admettant des solutions Liouvilliennes*, Thèse de l'Université de Rennes I, 1995.

Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université de Rennes, 35042 Rennes Cedex, France

E-mail address: `ftouzet@maths.univ-rennes1.fr`